فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران
سال شانزدهم، شماره ٤٧، تابستان ١٣٩٠، صفحات ٢٠٤-١٨٥

مدل‌سازی اختیارات آمریکایی با مدل رژیم-سوئیچینگ و مشتقات نفت

دکتر عبدالساده نیسی*

تاریخ دریافت: ٨٩/١٠/١١ تاریخ پذیرش: ٩٠/٢/٢٠

در این مقاله در نظر داریم بازارهای سهام و مشتقات را با ایده گرفتن از پژوهش‌های روز دنیا به‌گونه‌ای مدل‌سازی کنیم که قابل تعمیم در ایران بوده و برخی از ناکامی‌های بازار را تشریح بکنند. برای این منظور ابتدا با استفاده از خواص فرایند مارکوف و مفهوم رژیم‌های اقتصادی، رفتار قیمت دارایی پایه (سهام) را با رژیم- سوئیچینگ دینامیکی مدل‌سازی می‌کنیم. سپس با بستن یک اختیار آمریکایی روی این دارایی، یک مدل پویا و نوین در بازار مشتقات به‌دست می‌آوریم. علاوه بر این با تاثیر ثمرات رفاهی عواید نفت در دارایی پایه، یک مدل پویا با بازده تغییرپذیری تصادفی برای دارایی پایه‌ی نفت به‌دست می‌آوریم که مدل قیمت اختیار وابسته به آن آتی نفت را قیمت‌گذاری می‌کند، همچنین با اعمال برخی تغییرات محیطی در مدل دارایی پایه‌ی نفت، مشتقات زمین‌های نفت‌خیز را مدل‌سازی می‌کنیم. از آن‌جا که هدف این مقاله معرفی مدل‌های نوین در بازارهای مالی بوده و نظر به اینکه این مدل‌ها تا کنون در ایران به‌کار گرفته نشده‌اند، لذا برخی از این مدل‌ها را با استفاده از روش‌های پیشرفته‌ی عددی و نرم افزار Matlab بر روی داده‌های چند کشور توسعه یافته اجرا می‌کنیم. با توجه به این‌که قیمت‌گذاری اکثر کمیت‌های مالی متاثر از بازارهای جهانی است، لذا برای اجتناب از تاثیر مستقیم این بازارها بر قیمت‌گذاری کمیت‌های مهمی مانند نفت لازم است که عنایت خاصی توسط نهادهای مسئول در این زمینه شود.

* استادیار گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر دانشگاه علامه طباطبائی
a_neisy@iust.ac.ir

واژه‌های کلیدی: اوراق مشتقه، اختیارات آمریکایی، مشتقات نفت، ریاضیات مالی، مسایل مقدار اولیه و مرزی، تفاضلات متناهی، نرم افزار Matlab ، مدل بلک- شولز، لم ایتو، حرکت براونی، ریسک و پرتفوی.

۱. مقدمه

برای پژوهشگران و تحلیل گران مالی، اقتصادی، حسابرسان و مدیران ریسک در سازمان‌های پولی و مالی، تجزیه و تحلیل اوراق بهادار از اهمیت بالایی برخوردار است.

معمولاً در تجزیه و تحلیل اوراق بهادار از جمله اوراق قرضه، سهام و اوراق مشتقه بدون داشتن یک مدل ریاضی، اشتباهات ظریف، خطاهای غیر قابل تشخیص و سوءِ تفاهم‌هایی پیش خواهد آمد که هیچ کدام از گروه‌های تحلیل گر مالی و اقتصاددانان نمی‌توانند و نباید از آن چشم‌پوشی کنند. خوشبختانه اخیراً پژوهش گران و تحلیل گر مالی و ریسک با استفاده از تکنیک‌های پیشرفته‌ی ریاضی و کمک ریاضی‌دانان و اقتصاددانان توانسته‌اند مدل‌های نوینی طراحی کنند که در مقابل تغییرات بازار از خود واکنش نشان داده، برخی از مشکلات بازار را حل کنند. مدل‌های طراحی شده بستگی به نوع بازار متفاوت هستند. برای مثال معمولاً بازار اوراق قرضه با معادلات دیفرانسیل معمولی، بازار سهام با معادلات دیفرانسیل تصادفی و برنامه ریزی تصادفی و بازار مشتقات با معادلات دیفرانسیل جزیی و معادلات دیفرانسیل جزیی تصادفی مدل‌سازی می‌شوند.

یکی از مشهورترین مدل‌ها در بازارهای مالی مدل بلک –شولز است. در حوزه‌ی مدل‌سازی‌های مالی، مدل بلک – شولز نقش مهمی در تعیین قیمت دارایی‌های پرمخاطره (دارای ریسک بالا) بازی می کند و شالوده‌ای برای بسیاری از چارچوب‌های مدل‌سازی قیمت اختیارات به‌شمار می‌رود[1]. مفید بودن این مدل مشهور در مقام یک پایه‌ی تئوری در بازارهای مالی ثابت شده است، چرا که روش‌های بسته و تحلیلی زیادی برای قیمت بیشتر انواع اختیارات تحت این مدل وجود دارد که اکثر آنها به‌صورت یک تابع آماده در نرم‌افزار Matlab تعریف شده است. اما به‌هرحال نشان داده شده است که این مدل در پیش‌بینی خصوصیات مهم مشاهده شده در درآمدهای دارایی‌ها و نوسانات ضمنی بازار ناتوان است. به‌همین دلیل استدلال‌های زیادی به توسعه‌ی مدل‌های جانشین معطوف و فعالیت‌هایی در این زمینه انجام شده است.

---

1. John C, John Wilmott and Derakhshan

در مدل بلک – شولز قیمت دارایی پایه از فرایند حرکت براونی هندسی تبعیت می‌کند که در آن نوسانات و جابجایی قیمت دارایی ثابت فرض شده است، لذا به‌همین دلیل نمی‌تواند رفتار دینامیک یا تصادفی در تغییرات قیمت را پیش‌بینی یا توضیح دهد. در عوض، پژوهشهای اخیر بر روی مدل‌های غیرخطی نوسانات تصادفی متمرکز بوده است. مثلاً کامپولیتی و گروه پژوهشی‌اش[۱] بر روی خانواده‌ی جدیدی از مدل‌های انتشار پیوسته‌ی انتگرال‌پذیر مطالعه می‌کنند. یک دلیل اصلی برای مطالعه‌ی چنین مدل‌هایی، جایگزینی بازارهای کامل و دقیق با خصوصیات عدم‌تقارن (چولگی یا اثر لبخند) نوسانات ضمنی بازار است. با این استدلال و استدلال‌های دیگر معلوم می‌شود که مدل‌های پایه‌ای و حتی نوین در بازارهای مالی بسته به موقعیت جغرافیایی و زمانی باید تعمیم داده شوند تا بتوانند واقعیت جدید این بازارها را پوشش دهند .نظر به این‌که دست‌اندرکاران اکثر بازارهای مالی این اصل مهم را در دستور کار خود قرار داده‌اند و با توجه به تاثیر این بازارها بر قیمت گذاری کمیت‌های مهم مالی در ایران، در نظر داریم برخی از مدل‌های بازارهای سهام و مشتقات را که قابل بومی شدن در کشور بوده و برخی از واقعیت اقتصاد را توضیح می‌دهند را مورد مطالعه قرار دهیم. برای این منظور ابتدا مدل دارایی پایه را با اعمال رژیم‌های اقتصادی به یک مدل پویا تعمیم می‌دهیم. سپس با بستن یک اختیار آمریکایی روی این دارایی، یک مدل پویا و نوین در بازار مشتقات به‌دست می‌آوریم. سرانجام با تاثیر ثمرات رفاهی عواید نفت در دارایی پایه، یک مدل پویا با بازده تغییرپذیری تصادفی برای دارایی پایه‌ی نفت به‌دست می‌آوریم که مدل قیمت اختیار وابسته به آن آتی نفت را قیمت گذاری می‌کند، علاوه بر این با اعمال برخی تغییرات محیطی در مدل دارایی پایه‌ی نفت، مشتقات زمین‌های نفت خیز را مدل‌سازی می‌کنیم[۲].

با این مقدمات مقاله را به شکل زیر سازماندهی می‌کنیم: در بخش دوم مسئله‌ی قیمت گذاری اختیارات آمریکایی با مدل دارایی پایه‌ی رژیم سوئیچینگ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش سوم مسئله‌ی آتی‌های نفت و مدل‌های پیش‌بینی قیمت زمین‌های نفت‌خیز را تشریح می‌کنیم. در بخش آخر برخی از مدل‌های مزبور را به روش‌های عددی و با استفاده نرم افزار Matlab برای داده‌های چند کشور اجرا می‌کنیم.

امید است که این نوشتار در درک مفاهیم پایه‌ای مدل‌سازی و ایجاد انگیزه برای تعمیم و بومی سازی این نوع مدل‌سازی در کشور، مفید فایده واقع بوده و مرجعی برای پژوهشگران در رشته‌های

1. G., Albaness, G., Campolieti, and R., Makarov

۲. درخشان، مسعود

مرتبط به ریاضیات، مهندسی، آمار و علوم رایانه‌ای که مایل به دانستن نحوه استفاده از مهارت‌های خود در علوم مالیه هستند نیز شود. همچنین مرجعی برای محققین اقتصادی و مالیه که خواهان آشنایی با روش‌های ریاضی و عددی در زمینه مالیه باشند.

۲. مسئله‌ی قیمت گذاری اختیارات با رژیم سوئیچینگ

همان‌گونه که در مقدمه‌ی این مقاله و نوشته‌های دیگر پژوهشگران مالی بیان شده است، مدل بلک- شولز بر مفروضاتی استوار است که محدودیت‌هایی در بازار ایجاد می‌کند. یکی از این محدودیت‌ها، مدل دارایی پایه بوده که در آن تغییرپذیری و جابجایی ثابت فرض شده است، به همین دلیل نمی‌تواند رفتار دینامیک یا تصادفی بازار را توضیح دهد. در این بخش در نظر داریم این محدودیت را با استفاده از فرایند تصادفی مارکوف چند حالته رفع کنیم و یک مدل قابل قبول برای دارایی پایه با استفاده از رژیم‌های اقتصادی پیشنهاد کنیم. البته این نکته را یادآور می‌شویم که اگرچه این مدل به واقعیت اقتصاد کشورمان نزدیکتر بوده، اما ممکن است به‌کارگیری آن به صورت محض برای همه‌ی دارایی‌های پایه در هر زمان مفید فایده واقع نشود، بلکه باز قابل تعمیم بوده و می‌توان آن را در زمان‌های آتی نیز تغییر و تعمیم داد.

۲-۱. تعمیم مدل دارایی پایه به مدل رژیم سوئیچینگ مارکف

یک زنجیر مارکوف این خاصیت پایه را دارد که فرایند آن تنها به مقدار مشاهده شده‌ی پیشین وابسته است و از دیگر عوامل گذشته مستقل است. چندین مزیت مهم در استفاده از مدل‌های مارکوف وجود دارد. یکی از این مزایا آن است که در اغلب فرایندها به‌دلیل عدم وابستگی بین وضعیت کنونی و تاریخ گذشته‌ی آن، به‌راحتی می‌توان تابع چگالی الحاقی را تعبیر نمود، بنابراین ماتریس انتقال برای این فرایند، بعد از چندین نقطه‌ی زمانی دستیافتنی خواهد شد. با اعمال این احتمالات شرطی انتقال، می‌توان چگالی احتمال یک فرایند با زنجیره مارکوف پنهان را به‌صورت صریح به‌دست آورد. در پژوهش دایوم[1] یک مدل سوئیچینگ مارکوف برای قیمت گذاری اختیارات در یک آهنگ زمانی گسسته مورد مطالعه قرار گرفته و نشان داده است که مدل سوئیچینگ مارکوف می‌تواند رفتار رژیم‌های نوسان‌پذیری را توضیح دهد.

اکنون دلایل زیر را برای انتخاب رژیم‌های متفاوت برای نوسان‌پذیری مطرح می‌کنیم:

1. Jin-Chuan Duan, Ivilina Popova and Peter Ritchken

دلیل اول: رژیم‌های نوسان‌پذیر فاکتورهای ذاتی مهمی در اقتصاد هستند. آنچه که در این فرآیند مشاهده می‌شود، تغییرات متفاوت در نرخ بازده‌ی دارایی‌های مالی در طی بازه‌های زمانی معین است.

معمولاً چندین رژیم برای تغییرات نوسان‌پذیری در نظر گرفته و نشان داده می‌شود که نوسان‌پذیری بالاتر به تغییرات بزرگتر در ارزش دارایی‌ها منجر می‌شود. لذا در نظر گرفتن بیش از یک رژیم برای نوسان‌پذیری واقعیت بهتری از اقتصاد را نشان می‌دهد.

دلیل دوم: در یک بازار، میانگین و واریانس قیمت بازار یا نرخ بازده به‌طور معمول وابسته به زمان است. بنابراین در کار مدل‌سازی مالی، ایده‌ی خوبی نخواهد بود که همیشه نرخ ثابتی برای انتشار فرض شود. لذا بایستی حداقل تعداد قابل توجهی از رژیم‌های انتشار در نظر گرفته شوند تا رفتار واقعی یک بازار مالی قابل پیش‌بینی یا توضیح باشد.

دلیل سوم: در یک اقتصاد معمولاً دو چرخه‌ی کسب و کار متمایز وجود دارد، یعنی انبساط و انقباض. در چرخه‌ی انبساط سرمایه‌گذار انتظار بازده‌ی بالاتری از دارایی‌ها دارد، از سوی دیگر، در طی یک دوره‌ی انقباض اقتصادی، نرخ بازده‌ی سرمایه‌ها کاهش می‌یابد، همچنین ریسک بازار معمولاً با واریانس استاندارد قیمت بازار سنجیده می‌شود، لذا مهم است که نوسان‌پذیری را برای دوره‌های مختلف چرخه‌ی کسب و کار در نظر بگیریم که در این صورت فرض می‌شود که سوئیچینگ بین این دو نوع دوره‌ی کسب و کار در فضای مارکوف است.

با این توضیحات، روند اصلی مورد نظر ما در این بخش به کارگیری یک فرایند سوئیچینگ مارکوف در مدل دارایی پایه به شکل زیر است:

بازار مالی را در نظر بگیرید که در آن M وضعیت اقتصادی مطرح باشد. لذا در این بازار نوسان‌پذیری و جابجایی دارایی پایه می‌توانند مقادیر مختلف در رژیم‌های متفاوت اختیار کنند. برای توصیف و مدل کردن این بازار زنجیر مارکوف زمان پیوسته‌ی ε_t با تعداد M وضعیت را در نظر می‌گیریم. پس مدل دارایی پایه در این بازار به‌صورت زیر تعمیم پیدا می‌کنیم:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_{\varepsilon_t} dt + \sigma_{\varepsilon_t} dW_t \qquad 0 < t < T$$

که در آن dW_t فرایند براونی استاندارد، S_t دارایی پایه، σ_{ε_t} نوسان‌پذیری دارایی پایه و μ_{ε_t} جابجایی نرخ بهره‌ی بدون ریسک است. همچنین σ_{ε_t} و μ_{ε_t} به زنجیر مارکوف ε_t بستگی داشته که می‌توانند مقادیر مختلف در رژیم‌های متفاوت اختیار کنند.

مدل فوق را مدل **رژیم سوئیچینگ مارکوف** می گوییم.

بومی‌سازی: از آنجا که عوامل زیادی می‌توانند در اقتصاد کشور ما مؤثر باشند، مثلاً وقتی قیمت سکه در فروردین ۱۳۹۰ به‌صورت حبابی بالا رفت یا قیمت دلار در اسفند ۱۳۸۹ به‌صورت غیر واقعی افزایش یافت، بانک مرکزی وارد عمل شد و با اتخاذ سیاست جدیدی قیمت را پایین آورد، چنین سیاست‌هایی را می‌توان با استفاده ار فرایند رژیم سوئیچنگ مارکوف بیان کرد، لذا با داشتن مدلی مانند فوق این امکان بوجود می‌آید که به‌توانیم بازار را به صورت خودکار در مواقع بحرانی سوئیچ دهیم، همچنین می‌توان با اضافه کردن جمله‌ی پرش به این مدل لبخند زنی بازار را نیز توضیح داد.

۲-۲.مدل اختیارات، تحت دارایی پایه با مدل رژیم سوئیچینگ مارکوف

در اینجا در نظر داریم سبدی از بازار سهام و بازار اختیارات که دارایی پایه‌ی آن از مدل رژیم سوئیچینگ مارکوف تبعیت می‌کند را مدل‌سازی کنیم. برای این منظور فرض کنید $u_k = u_k(S_t, t)$ قیمت یک برگه‌ی اختیار به ازای رژیم $k(k = ۱,۲,\ldots, M)$ باشد.

اکنون بنابر اصل ریسک خنثی، لم ایتو، قضیه‌ی فایمن-کاتس و یک سری محاسبات سنگین ریاضی می‌توان نشان داد که قیمت این برگه در معادله‌ی دیفرانسیل جزیی زیر صدق می‌کند[1]:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{۱}{۲}\sigma_k^۲ S^۲ \frac{\partial^۲ u_k}{\partial S^۲} + r_k S \frac{\partial u_k}{\partial S} - r_k u_k + \sum_{j=۱}^{M} q_{kj}\left(u_j - u_k\right) = ۰ \qquad k = ۱,۲,\ldots, M$$

که در آن q_{kj} درایه‌های ماتریس وضعیت مارکوف است. بدین ترتیب یک برگه‌ی اختیار با M رژیم، با M معادله دیفرانسیل جزیی مدل می‌شود، همچنین مدل فوق فقط در عبارت $\sum_{j=۱}^{M} q_{kj}\left(u_j - u_k\right)$ با مدل استاندار بلک- شولز متفاوت است و اگر دارایی پایه با یک رژیم مدل شود، یعنی $M = ۱$، آنگاه داریم:

1. J. Buffington, R. J. Elliott

$$\sum_{j=1}^{1} q_{kj}\left(u_j - u_1\right) = q_{11}\left(u_1 - u_1\right) = 0$$

لذا به مدل استاندارد بلک- شولز می‌رسیم. به هر حال قیمت برگه‌های اختیار با دارایی پایه‌ی M رژیمی در معادلات فوق صدق می‌کنند و برای تعیین قیمت این نوع برگه‌ها باید اطلاعات مهم دیگری از قبیل شرایط اولیه، مرزی و نوع اختیار موجود باشد. برای نمونه در صورتی که برگه‌ی اختیار از نوع آمریکایی باشد، آنگاه به علت پویایی این نوع برگه‌ها که در هر زمان قبل از سررسید قابل اجرا گذاشتن است، مدل با کمی پیچیدگی‌های بیشتر نسبت به نوع اروپایی همراه می‌شود و به دلیل اینکه اختیارات آسیایی بیشتر به اختیارات آمریکایی شبیه هستند، ما در نظر داریم اختیارات آمریکایی را مدل کنیم تا بومی‌سازی کردن آنها برای دیگر محققین مالی در ایرن راحت‌تر باشد. اکنون بدون پرداختن به جزئیات، می‌توان نشان داد که قیمت یک برگه‌ی اختیار فروش آمریکایی، $u_k = u_k\left(S_t, t\right)$ ، با دارایی پایه‌ی S_t ، که از فرایند رژیم سوئیچینگ مارکوف معرفی شده در فوق تبعیت می‌کند، در مدل زیر صدق می‌کند[1]:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_k^2 S^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial S^2} + r_k S \frac{\partial u_k}{\partial S} - r_k u_k + \sum_{j=1}^{M} q_{kj}\left(u_j - u_k\right) = 0, \text{ اگر } S \rangle \overline{S}_t(t)$$

$$u_k\left(S,t\right) = K - S, \text{ اگر } 0 \le S \le \overline{S}_t(t)$$

$$u_k\left(S,T\right) = \max\left\{K - S, 0\right\}$$

$$u_k\left(\overline{S}_k(t), t\right) = K - \overline{S}_k(t),$$

$$\frac{\partial u_k\left(\overline{S}_k(t), t\right)}{\partial S} = -1$$

$$\lim_{S \uparrow \infty} u_{k_i}\left(S,t\right) = 0,$$

$$\overline{S}_t(T) = K,$$

که در آن K قیمت توافقی، $\overline{S}_t(t)$ کرانه‌ی سررسید، r_k نرخ بهره‌ی بدون ریسک و σ_k نوسان‌پذیری رژیم kام می‌باشند.

1. J. Buffington, R. J. Elliott

در ادبیات معادلات دیفرانسیل جزیی به مساله‌ی فوق، مساله‌ی مقدار اولیه و مرزی با کران آزاد می‌گویند. این‌گونه مسایل دارای روش‌های حل پیچیده‌ای می‌باشند و محققین ریاضی، مقالات زیادی برای حل این‌گونه مسایل در حالت‌های خاص به چاپ رسانده‌اند. این مقاله یک روش عددی نوین در بخش چهارم برای حل این مساله ارایه کرده است.

۳. مبانی مدل‌سازی مشتقات نفت

در این بخش نشان می‌دهیم که با کمی تغییرات در مدل دارایی پایه، علاوه بر حذف برخی از محدودیت‌های بازارهای مالی به کاربردهای مهم وجالب در مشتقات صنعت نفت می‌رسیم که در زیر دو مساله‌ی روز و مهم در این زمینه را مدل‌سازی می‌کنیم. اهمیت این بخش به اندازه‌ای است که می‌توان مدل دارایی پایه‌ی بخش ۲ را با این مدل‌ها ترکیب کرده، یک مدل کارا و نوین برای مشتقات صنعت نفت کشور ارایه نمود.

۳-۱.مدل‌سازی قیمت‌های آتی‌های نفت

همان‌گونه که در بخش‌های قبلی این مقاله اشاره شد، مدل دارایی پایه برای مشتقات به صورت زیر است:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \qquad \circ < t < T$$

که در آن ضرایب μ و σ، ثابت فرض می‌شوند. در سال ۱۹۹۷ شوارتز با اعمال اثرات ثمرات رفاهی در این ضرایب و دینامیکی کردن آنها، مدل‌های زیر را برای دارایی پایه‌ی و آتی‌های نفت پیشنهاد کرد:

فرض کنید δ ثمرات رفاهی آتی‌های نفت بوده که به‌صورت تصادفی با مدل زیر بیان می‌شود[1]:

$$d\delta = \alpha\left(\gamma_p - \delta\right)\ dt + \sigma_۱ dW_۱$$

همچنین فرض کنید γ_T ثمرات رفاهی بلند مدت نفت باشد، یعنی افزایش قیمت نفت به اضافه‌ی ثمرات رفاهی، آنگاه دینامیک قیمت دارایی پایه‌ی، نفت، به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

1. G., Cortazara , E. S., Schwartz

$$\frac{dS}{S} = (\gamma_T - \delta)\ dt + \sigma_2 dW_2$$

که در آن α ضریب ثمرات رفاهی، γ_p ثمرات رفاهی بلند مدت و dW_1 و dW_2 فرایندهای استاندارد وینر برای ثمرات رفاهی، δ، و دارایی پایه‌ی S، با ضریب همبستگی ρ می‌باشند، یعنی:

$$dW_1 dW_2 = \rho dt$$

برای بیان مدل‌های ثمرات رفاهی نفت و دارایی پایه، شوارتز در سال ۱۹۹۷ بازده کل بلند مدت روی نفت، γ_T، را با r جابه‌جا کرد و در نهایت قیمت بازار را از ریسک ثمرات رفاهی ناشی از جابجایی مورد انتظار یعنی λ کم کرد و به مدل زیر رسید:

مدل ثمرات رفاهی نفت $$d\delta = \left[\alpha\left(\gamma_p - \delta\right) - \lambda\right]\ dt + \sigma_1 dW_1$$

مدل دارایی پایه‌ی نفت $$\frac{dS}{S} = (r - \partial)\quad dt + \sigma_2 dW_2$$

تفاوت این مدل با مدل دارایی پایه‌ی حرکت براونی هندسی در این است که در اینجا ضریب dt ثابت نبوده و تغییرات تصادفی دارد، لذا نباید انتظار داشت که قیمت یک مشتقه که روی این دارایی پایه بسته می‌شود در معادله دیفرانسیل جزیی بلک-شولز صدق کند. اکنون با اعمال تغییرات تصادفی بودن ضریب dt در روند مدل‌سازی و بدون پرداختن به جزییات می‌توان نشان داد که قیمت یک آتی‌های نفت، $V = V\left(S, \delta, t\right)$، با دارایی پایه‌ی S، که از فرایند فوق تبعیت می‌کند، در معادله‌ی دیفرانسیل جزیی[1]:

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \delta^2} + \sigma_1\sigma_2\rho S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \delta} + (r - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} + \left[\alpha\left(\gamma_p - \delta\right) - \lambda\right]\frac{\partial V}{\partial \delta} - \frac{\partial V}{\partial T} = 0, \qquad S > 0$$

همراه با شرط مرزی:

1. G., Cortazar, E. S., Schwartz

$$V\left(S,\delta,T=\circ\right)=S$$

صدق می‌کند.

مساله‌ی فوق یک مساله‌ی مقدار اولیه و مرزی بوده و برای حل آن نیاز به پیش زمینه‌های بالای ریاضی دارد، در این مقاله در نظر نداریم جزییات روش‌های حل را بیان کنیم، بلکه به ارایه‌ی یک روش عددی در فصل چهار اکتفا می‌کنیم.

بومی‌سازی: برای توسعه و بومی سازی مدل فوق می‌توان از یک مدل دو یا سه عاملی برای قیمت آتی‌های نفت ایران استفاده کرد، که به نظر می‌رسد این گونه مدل‌ها داده‌ها را خیلی خوب تطبیق می‌دهند. علاوه بر این می‌توان یک روش حل عددی پیشنهاد داد که به کمک آن می‌توان مدل مذبور را شبیه‌سازی کرد. توجه شود که مدل‌های چند عاملی باعث می‌شوند که کاربردهای عملی در ارزش‌گذاری و پوشش حقیقی و ادعاهای مشروط مالی نفت را پوشش دهند.

۳-۲. مدل‌سازی قیمت‌گذاری زمین نفت‌خیز

در این بخش در نظر داریم قیمت زمین نفت خیز توسعه نیافته را مشروط بر قیمت نقدی نفت، مدل‌سازی کنیم. اگر چه چنین مسایلی بیشتر در کشورهایی مثل آمریکا کاربرد دارند، اما بومی کردن چنین مساله‌ای برای زمانی که بخواهیم برخی از سهم‌های زمین‌های نفت‌خیز را در بورس ارایه کنیم مفید است.

برای این منظور ابتدا یک مدل برای قیمت نقدی نفت با ریسک تعدیل شده معرفی می‌کنیم، سپس زمین نفت‌خیز را به‌عنوان یک مشتقه در سه مرحله‌ی زیر مدل‌سازی می‌کنیم:

مرحله‌ی اول مدل‌سازی قیمت زمین نفت خیز قبل از واگذاری برای توسعه، مرحله‌ی دوم مدل‌سازی قیمت زمین نفت خیز در جریان توسعه است و مرحله سوم مدل‌سازی قیمت زمین نفت خیز در هنگام تولید می‌باشد.

۳-۲-۱. مدل دارایی پایه‌ی نفت برای قیمت‌گذاری زمین نفت‌خیز

فرض کنید S، قیمت نقدی نفت، $\bar{S}$، میانگین بلند مدت قیمت واحد نفت، β، پارامتر بازگشت به میانگین، r، نرخ بهره‌ی بدون ریسک، که ثابت فرض می‌شود، C، میانگین ثمرات رفاهی به ازای داشتن یک واحد از نفت، σ، نوسان‌پذیری آنی از بازده‌ها به ازای داشتن یک واحد از نفت

و dW، نموهای فرایند گاوسی- وینر استاندارد می‌باشند، آنگاه بنابر اصل بازگشت به میانگین در قیمت‌ها و با استفاده از متغیر ثمرات رفاهی ، مدل قیمت دارایی پایه به صورت زیر بیان می‌شود[1]:

$$\frac{dS}{S}=\left(r-C-\beta\left(\bar{S}-S\right)\right)\ dt+\sigma dW$$

۳-۲-۲. مدل قیمت یک زمین نفت‌خیز

اکنون برای هر سه مرحله‌ی معرفی شده در فوق قیمت زمین نفت خیز را مدل‌سازی می کنیم . برای این منظور فرض کنید $H\left(S,T^{i}\right)$، ارزش زمین نفت‌خیز قبل از واگذاری برای توسعه، $U\left(S,T^{d}\right)$، ارزش زمین نفت‌خیز در جریان توسعه است، $U\left(S,Q\right)$ ارزش زمین نفت‌خیز در هنگام تولید، T^{i}، زمان باقیمانده تا سررسید از اختیار توسعه، T^{d} ، زمان باقیمانده تا سرمایه‌گذاری کامل، Q ، ذخیره باقیمانده نفت، I، ارزش فعلی سرمایه‌گذاری توسعه در مرحله‌ی دوم، S_{ci}^{*}، قیمت نقدی بحرانی نفت، R ، مالیات‌ها : نرخ حق‌الامتیاز، $crop$، مالیات‌ها : نرخ مالیات بر درامد شرکت و λ، بیمه‌ی ریسک کشور می‌باشند. با این نماد گذاری مدل‌ها را در سه مرحله‌ی زیر معرفی می کنیم.

ارزش یک زمین نفت‌خیز در مرحله ۳

فرض کنید استراتژی قیمت گذاری به این صورت است که سرمایه‌گذاری که یک قرارداد آتی‌ها را نگه می‌دارد که به شخص دیگری زمین نفت‌خیز را در این مرحله قرض می‌دهد و مقدار نقدی M را دریافت می کند. در این‌صورت، اگر یک سرمایه‌گذار یک موقعیت خرید در زمین نفت‌خیز بگیرد و به تعداد $\frac{H_S}{F_S}$ موقعیت فروش در قرارداد آتی‌ها داشته باشد، او ریسکش را پوشش می‌دهد و بایستی بازده‌ای برابر با نرخ بهره‌ی بدون ریسک به اضافه حق بیمه‌ی ریسک وابسته به کشور که زمین نفت‌خیز در آن قرار دارد، به‌دست آورد. در نتیجه مدل قیمت زمین نفت‌خیز در مرحله ۳ در معادله دیفرانسیل جزیی زیر[2]:

$$\frac{1}{2}\sigma^{2}S^{2}\frac{\partial^{2}V}{\partial S^{2}}-q_{d}V_{Q}+M+\left(r-C-\beta(\bar{S}-S)\right)S\frac{\partial V}{\partial S}-\left(r+\lambda\right)V=0$$

1. G., Cortazar, E. S., Schwartz
2. F., Jamshidian, M., Fein, G., Cortazar, E. S., Schwartz

همراه با شرط مرزی :

$$V\left(S,0\right)=0$$

و شرایط:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left(0,Q\right)=0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left(\infty,Q\right)=0$$

صدق می‌کند که در آن q_d، نرخ تولید سالانه در این مرحله است.

ارزش یک زمین نفت‌خیز در مرحله ۲

با استدلال‌هایی مشابه فوق می‌توان نشان داد که ارزش زمین نفت‌خیز در این مرحله در معادله دیفرانسیل جزیی[1]:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}-U_{T^d}+\left(r-C-\beta(\overline{S}-S)\right)S\frac{\partial U}{\partial S}-\left(r+\lambda\right)U=0$$

همراه با شرط اولیه و کرانه‌ای زیر است:

$$U\left(S,0\right)=V\left(S,Q\right)$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\left(0,T^d\right)=0$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left(\infty,T^d\right)=0$$

شرایط فوق به این معنی است که زمانی که توسعه کامل شد ارزش زمین نفت‌خیز بایستی برابر با ارزش زمین نفت‌خیز در مرحله‌ی ۳ با ذخیره‌ی Q باشد.

ارزش یک زمین نفت‌خیز در مرحله ۱

بالاخره ارزش زمین نفت‌خیز توسعه نیافته در اقتصاد بدون فرصت آربیتراژ بایستی در معادله دیفرانسیل جزیی[2]:

1. F., Jamshidian, M., Fein, G., Cortazar, E. S., Schwartz
2. F., Jamshidian, M., Fein, G., Cortazar, E. S., Schwartz

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} - H_{T^d} + \left(r - C - \beta(\bar{S} - S)\right) S \frac{\partial H}{\partial S} - \left(r + \lambda\right) H = 0$$

همراه با شرایط اولیه و کرانه‌ای زیر صدق کند:

$$H(S,0) = \max\left(U\left(S,T^d\right) - I, 0\right)$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\left(0,T^i\right) = 0$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\left(\infty,T^i\right) = 0$$

شرایط فوق به این معنی است که زمانی که زمان موجود برای آغاز توسعه به اتمام رسید، ارزش زمین نفت‌خیز توسعه‌نیافته وابسته خواهد بود به اینکه آیا برای مالک بهین خواهد بود که یک سرمایه‌گذاری توسعه را بوجود بیاورد و یک زمین نفت‌خیز در مرحله‌ی ۲ را به‌دست آورد، و یا امتیاز انحصاری را واگذار کند.

٤. روش‌های حل مدل‌های مالی

همان‌گونه که در بخش‌های قبل توضیح دادیم، مدل دارایی پایه با معادلات دیفرانسیل تصادفی و مدل مشتقات مالی با معادلات دیفرانسیل جزیی بیان می‌شوند. از آنجا که تجزیه و تحلیل این این مدل‌ها بدون شناخت دقیق و کامل این معادلات امکان‌پذیر نبوده، لذا تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل تصادفی و معادلات دیفرانسیل جزیی از اهمیت ویژه‌ای در بازارهای مالی پیدا می‌کنند، بر همین اساس نوشته‌های زیادی در ده‌ی اخیر تحت عنوان معادلات دیفرانسیل تصادفی و معادلات دیفرانسیل جزیی در مالی به چاپ رسیده و توجه دانشمندان زیادی را به این موضوع جلب کرده شده است. ما در این بخش در نظر نداریم تمام روش‌های حل را با جزییات توضیح دهیم بلکه به ارایه‌ی روشهای عددی برای چند مدل ارایه شده در فوق می‌پردازیم.[1]

٤-١. کارایی روش‌های عددی

اکثر مدل‌های مالی تحت شرایطی ساخته می‌شوند که گاهی این شرایط با واقعیت تطابق ندارند، برای نمونه در مدل حرکت براونی برای پیش‌بینی قیمت سهام، تغییر پذیری، σ، ثابت فرض شده

1. Abdolsadeh Neisy, G. D., Smith

است، حال اگر تاریخ سررسید پنج سال فرض شود، آنگاه فرض ثابت بودن تعییر پذیری سهام در طول این مدت منطقی به نظر نمی‌رسد. برای رفع این مشکل دو روش پیشنهاد می‌شود، روش اول استفاده از مدل‌های نوین مالی و روش دوم استفاده از روش‌های حل مناسب و کارا مانند روش‌های عددی می‌باشد. از آنجا که روش‌های عددی بر افراز بازه‌ی زمانی $[0,T]$ به بازه‌های کوچکتر استوار است، لذا فرض ثابت بودن برخی پارامترهای مالی مانند تغییرپذیری در دوره‌ی زمانی کوچک‌تر مثل یک هفته یا چند روز منطقی‌تر از کل دوره تا تاریخ سررسید است، علاوه بر این اکثر مواقع قیمت در تمام زمان‌های بین $[0,T]$ لازم نبوده و هدف داشتن قیمت در زمان‌های متناهی در این بازه است که این کار با پیاده سازی روش‌های عددی امکان‌پذیر است. با این استدلال و توجه به اینکه اکثر مدل‌های مالی به دلیل پیچیدگی و داشتن جمله‌ی تصادفی جواب تحلیلی و بسته ندارند، ما روش‌های عددی را برای حل پیشنهاد می‌کنیم.

٤-۲. روش‌های عددی پیش‌بینی شاخص و قیمت دارایی پایه

در این بخش در نظر داریم با استفاده از نرم افزار Matlab و روش‌های عددی، یک روش برای حل معادله دیفرانسیل تصادفی در حالت کلی زیر که در مدل‌های دارایی پایه بسیار کاربرد دارد، ارایه دهیم:

$$dS_t = \mu(S_t,t)dt + \sigma(S_t,t)dW_t \quad 0 < t < T$$

برای این منظور بازه‌ی زمانی $[0,T]$ را به n زیر بازه کوچک $\left[t,t+\Delta t\right]$ افراز کرده مشتقات را با یک روش تفاضلی مثلاً پیشرو یا پسرو تقریب می‌زنیم، سپس با به‌کار گیری خاصیت فرایند وینر، dW_t، برای زمان‌های بسیار کوچک Δt به صورت زیر[1]:

$$W\left(t+\Delta t\right) - W(t) = \Delta W(t) = \varepsilon\sqrt{\Delta t},\ \ \varepsilon \sim N(0,1)$$

1. Bernt Oksendal

معادله دیفرانسیل تصادفی را به معادله تفاضلی تبدیل می‌کنیم، در نهایت با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو و نرم افزار Matlab مسیرهای پیش‌بینی قیمت را تعیین می‌کنیم. برای روشن شدن مطلب، دو مساله را در زیر به روش‌های عددی حل می‌کنیم:

مساله‌ی مقایسه‌ی شاخص‌های هشت کشور

بدون نوشتن محاسبات ریاضی، دستورات زیر را برای پیش بینی شاخص دارایی چهار کشور اروپایی، کشورهای ژاپن، کانادا و آمریکا از تاریخ 07-Feb-2001 تا تاریخ 24-Apr-2006 به کار می‌بریم:

```
load SDE_Data, SDE_Data
```

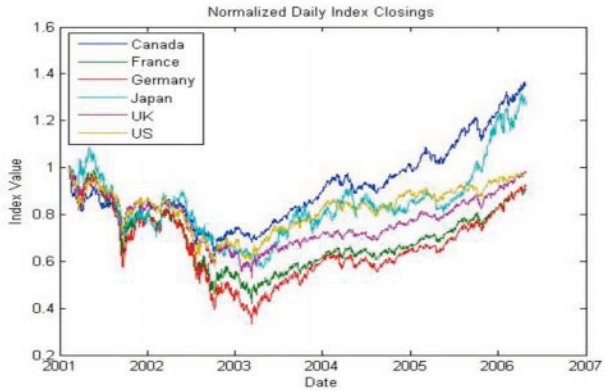
دستور فوق داده‌های تصادفی هفت کشور را به صورت زیر تعریف می‌کند:

```
SDE_Data =
Dates: [1359x1 double]
Canada: [1359x1 double]
France: [1359x1 double]
Germany: [1359x1 double]
Japan: [1359x1 double]
UK: [1359x1 double]
US: [1359x1 double]
Euribor3M: [1359x1 double]
```

مجموعه دستورات زیر، داده‌های ساخته شده در فوق را پس از شاخص گذاری و محاسبه فرایند قیمت‌شان رسم می‌کنند:

```
fields    = fieldnames(SDE_Data);
nIndices  = numel(countries);
countries = fields(2:end-1);
prices = [SDE_Data.Canada SDE_Data.France SDE_Data.Germany
SDE_Data.Japan  SDE_Data.UK     SDE_Data.US];
yields = SDE_Data.Euribor3M;
yields = 360 * log(1 + yields);
plot(SDE_Data.Dates, ret2price(price2ret(prices))), datetick('x')
xlabel('Date'), ylabel('Index Value'), title ('Normalized Daily Index
Closings')
legend(countries, 'Location', 'NorthWest')
```

با اجرای دستورات فوق در نرم افزار Matlab خواهیم داشت:



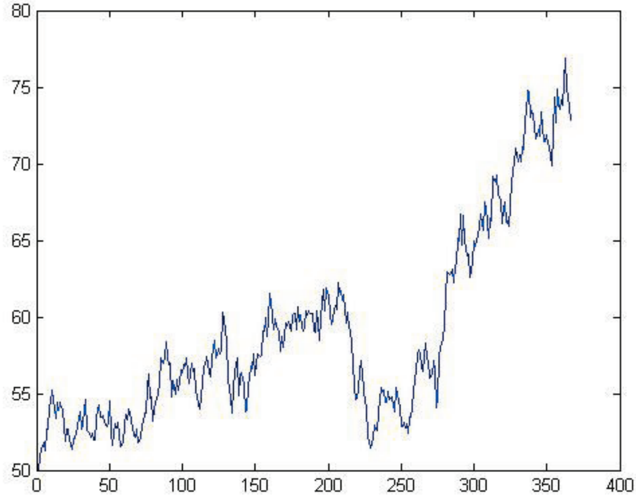
دستورات فوق را می‌توان برای داده‌های هر چند کشور دیگر به‌کار برد.

مساله پیش‌بینی قیمت سهام

فرض کنید فرایند قیمت سهام از مدل حرکت براونی هندسی با قیمت اولیه ۵۰ $، جابجایی ۰/۱ و نوسانات ۰/۳ تبعیت می‌کند، اکنون با به‌کارگیری روش‌های عددی و شبیه سازی مونت کارلو، کد برنامه نویسی Matlab زیر را برای رسم یک مسیر نمونه به‌کار برده می‌شود:

```
syms s mu sigma T NSteps N
s=50;mu=0.1;sigma=0.3;NSteps=365;T=1;N=3;
SPaths = zeros(N, 1+NSteps);
SPaths(:,1) = s;
dt = T/NSteps;
nudt = (mu-0.5*sigma^2)*dt;
sidt = sigma*sqrt(dt);
for i=1:N
for j=1:NSteps
SPaths(i,j+1)=SPaths(i,j)*exp(nudt + sidt*randn);
end
end
randn('seed' ,0) ;
plot(1:length(SPaths),SPaths(1,:))
```

نتیجه‌ی اجرای دستورات فوق در زیر آمده است:



بومی سازی: در فوق دو مساله‌ی مهم به روش عددی حل و جواب آن‌ها با استفاده از نرم افزار Matlab پیاده سازی و رسم شد. از آنجا که مدل ارایه شده دارای حالت کلی بوده و با کمی تغییرات می‌توان آن را برای داده‌های هر کشوری پیاده سازی کرد، لذا می‌توان با اعمال برخی تغییرات در پارامترها، مدل‌های فوق را بومی‌سازی کرده و برای هر دارایی پایه از جمله نفت یا هر سهام در بازار بورس ایران به کار برد. علاوه بر این روش عددی فوق را می‌توان برای رژیم‌های متفاوت اقتصادی نیز به‌کار برد. پیشنهاد می‌شود که مدل را با تغییرپذیری و بازده جابجایی ثابت برای داده‌های شاخص جهار صنعت در بورس تهران پیاده سازی کرده، سپس مدل‌های تعمیم یافته را برای این داده‌ها اجرا کنید. علاوه بر این با داشتن داده‌های قیمت نفت، مدل‌های فوق را روی این داده‌ها امتحان کنید.

۴-۳. حل مدل اختیارات تحت دارایی پایه با مدل رژیم سوئیچینگ مارکوف

بر اساس مدل‌سازی ارایه شده در بخش ۲.۲، قیمت یک برگه‌ی اختیار آمریکایی با دارایی پایه‌ای که از فرایند رژیم سوئیچینگ مارکوف تبعیت می‌کند در یک مساله‌ی مقدار اولیه و مرزی با M

معادله‌ی دیفرانسیل جزیی و M کران آزاد صدق می‌کند که این مساله جواب تحلیلی یا فرم بسته ندارد. لذا تلفیقی از تقریب عددی روش جریمه و تفاضلات متناهی را برای حل انتخاب می‌کنیم[1].

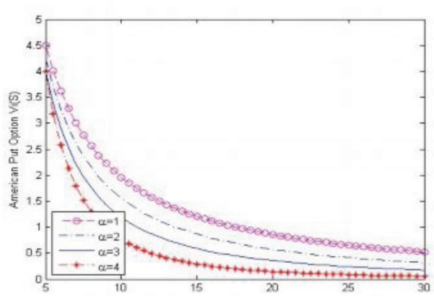
ایده‌ی اصلی روش جریمه برای رفع شدن کران آزاد با اضافه کردن عبارت جریمه در معادله دیفرانسیل جزیی می‌باشد. برای تعمیم این ایده در سیستم رژیم سوئیچینگ، عبارت جریمه را به هر یک از M معادله دیفرانسیل جزیی اضافه می‌کنیم، سپس مساله را به یک سیستم معادلات دیفرانسیل جزیی با حدود شرایط مرزی ثابت تبدیل می‌کنیم.

اکنون روش تفاضلات متناهی را می‌توان روی سیستم حاصل پیاده سازی کرد، برای این منظور ابتدا فرض می‌کنیم که S_∞ قیمت دارایی به قدر کافی بزرگ باشد، سپس ناحیه‌ی $[۰,S_\infty]\times[۰,T]$ را با انتخاب $\Delta S=\dfrac{S_\infty}{M+۱}$ و $\Delta t=\dfrac{T}{N+۱}$ ، به $(N+۱)(M+۱)$ ناحیه‌ی کوچک افراز کرده، قرار می‌دهیم:

$$V_i^{j,n}=V_i^{\varepsilon}\left(j\Delta S,n\Delta t\right),\ ۰\le j\le M+۱,\ ۰\le n\le N+۱\ ,۱\le i\le m,$$

که در آن V_i^{ε} قیمت یک مشتقه به ازای رژیم iام در نقاط گره‌ای (j,n) می‌باشد. حال مشتقات موجود در مساله‌ی اخیر را با استفاده از گسسته سازی مرکزی و کرانک –نیکلسون تقریب زده به یک سیستم معادلات خطی می‌رسیم که با استفاده از نرم‌افزار Matlab حل می‌شود.

روش فوق را برای یک اختیار آمریکایی اجرا کرده، بدون نوشتن روابط ریاضی، قیمت این اختیار را در زمان $t=۰$ به ازای چهار رژیم $\alpha_۰=۱,۲,۳,۴$، برای Sهای واقع در بازه‌ی $[۵,۳۰]$ رسم می‌کنیم:



1. G., Cortazara , E. S., Schwartz, Q. M., Khaliq, D. A., Voss and S. H. K., Kazmi

۴-۴. راهکاری برای اجرای مدل‌های آتی‌های نفت و مدل قیمت زمین نفت‌خیز

روش‌های عدد حل مساله‌ی مدل قیمت آتی‌های نفت شبیه روش ارایه شده در بخش ۳.۴ بوده، با این تفاوت که شرایط مرزی آزاد نیستند، لذا نیاز به به روش جریمه نبوده و فقط روش تفاضلات متناهی کافی است. همچنین روش حل مساله‌ی زمین نفت‌خیز نیز به‌صورت فوق می‌باشد.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی

همان‌گونه که در این مقاله اشاره شد، نحوه‌ی بومی‌سازی کردن در اکثر بخش‌ها آمده است، لذا پیشنهاد می‌شود ابتدا مدل‌های ارایه شده در این مقاله را برای داده‌های بازارهای مالی کشور مثلاً داده‌های شاخص یک یا چند صنعت در بازار بورس تهران را اجرا کنید، سپس بررسی کنید که آیا این مدل‌ها رفتار قیمت یا شاخص این داده‌ها را پوشش می‌دهند یا خیر. در صورت مثبت بودن مدل را جهت پیش بینی برای آینده استفاده کنید و اگر این گونه نباشد مدل را تعمیم داده روند فوق را اینقدر تکرار کنید تا به یک مدل قابل برای بازار مالی مثلاً سهام برسید. علاوه بر این ممکن است به‌جای تعمیم مدل با تعمیم روش حل مدل قابل قبول شود که این امر توسط محققین ریاضی کاربردی باید انجام گیرد که در این‌صورت یک خط مشیی جهت تحقیق و تولید علم در این زمینه فراهم می گردد.

منابع

الف- فارسی

درخشان، مسعود (۱۳۸۳)، *مشتقات و مدیریت ریسک در بازارهای نفت*، موسسه‌ی مطالعات بین‌المللی انرژی.

ب- انگلیسی

Albaness, G. and G. Campolieti (2005), *Advanced Derivatives Pricing and Risk Management: Theory, Tools and Hans-on Programming Application Academic Press*, Elsevier Science. USA.

Buffington, J. and R. J. Elliott (2002), “American Options With Regime Switching”, *International Journal of Theoretical and Applied*, Finance, vol. 5, pp. 497-514.

Campolieti, G. and R. Makarov (2006), *On Properties of Analytically Solable Families of Local Volatility Diffusion Models*.

Campolieti, G. and R. Makarov (2005), “Pricing Path-Dependent Options With a Bessel Bridge”, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*.

Cortazar, G. and E. S. Schwartz (1997), “Implementing a Real Option Model for Valuing an Undeveloped Oil Field”, *International Transactions in Operational Research*, vol. 4, pp. 125-137.

Cortazara, G. and E. S. Schwartz (2003), “Implementing a Stochastic Model for Oil Futures Prices”, *Energy Economics*, vol. 25, pp. 215–238.

Duan, Jin-Chuan, Ivilina, Popova and Peter, Ritchken (2002), “Option Pricing Under Regime Switching”, *Quantitative Finance*, vol. 2 , pp. 1-17.

Hull, John C. (2007), *Fundamentals of Futures and Options Markets and Derivagem Package*, 6th Edition, Prentice Hall.

Jamshidian, F. and M. Fein (1990), “Closed Form Solutions for Oil Futures and European Options in The Gibson Schwartz model: a comment”, Working Paper, Merrill Lynch Capital Markets.

Khaliq ,Q. M., D. A. Voss and S. H. K. Kazmi (2006), “A linearly Implicit Predictor Corrector Scheme for Pricing American Options Using a Penalty Method Approach”, *Journal of Banking and Finance*, vol. 30, pp. 489-502.

Neisy, Abdolsadeh (2008), “Least–squares Method For Estimating Diffusion Coefficient Iranian”, *International Journal of Engineering Science*, vol. 19, no. 1-2, pp. 17-19.

Oksendal, Bernt (1998), *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg,.

Smith, G. D. (1998), *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford.

Wilmott, John (2006), *Paul Wilmott on quantitative finance,* Wileyand Sons.