

مدل‌سازی و پیش‌بینی قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی

دکتر حمید خالوزاده*

دکتر علی خاکی صدیق**

تاریخ دریافت ۸۳/۴/۱۰ تاریخ پذیرش ۸۳/۶/۳۱

چکیده

فرایندهای سری زمانی را می‌توان به سه طبقه خطی، تصادفی و آشوبگونه دسته بندی کرد و بر این اساس قابلیت پیش‌بینی در فرایندهای خطی ممکن، در فرایندهای تصادفی غیرممکن و در فرایندهای آشوبگونه تا حدی ممکن است. تحقیقات و مطالعات انجام شده قبلی در زمینه مدل‌سازی و پیش‌بینی قیمت سهام بیشتر بر اساس اثبات این فرضیه بوده است که تغییرات قیمت و بازده سهام در بازار بورس و مخصوصاً بازار بورس تهران علی‌رغم شباهت زیادی که به رفتار تصادفی و اتفاقی دارد، اتفاقی نیست بلکه از نوع آشوبگونه است و بنابر این می‌توان توسط مدل‌های پیچیده و قوی مانند شبکه‌های عصبی، فازی و ترکیب‌های مختلف این دو روش مدل‌سازی و نیز پیش‌بینی کوتاه مدت و میان مدت را انجام داد. در این تحقیق، تغییرات قیمت و بازده سهام در بازار بورس تهران با هدف مدل‌سازی بر اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی^۱ بر روی مقوله پیش‌بینی، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است، با در نظر گرفتن نوسانات قیمت سهام به شکل تصادفی و بر اساس مدل بلاک و شولز، مدل‌سازی دینامیک فرایند مولد قیمت سهام در بازار بورس تهران را با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی پیشنهاد کرده و بر این اساس مدل‌سازی، شبیه‌سازی و پیش‌بینی قیمت و بازده برای یکی از شرکت‌های عضو بازار بورس تهران انجام می‌گیرد، برای بررسی کارایی روش پیشنهادی مقایسه‌ای نیز با روش مدل‌سازی خطی صورت پذیرفته است.

طبقه‌بندی JEL: C53, C5.

کلید واژه: سری زمانی، مدل‌سازی، پیش‌بینی، مدل‌های ARIMA، معادلات دیفرانسیل تصادفی، انتگرال ایتو.

۱- مقدمه

ناشناخته بودن عوامل تأثیرگذار بر تغییرات قیمت سهام همواره دلیلی برای روی آوردن به پیش‌بینی تغییرات قیمت سهام شرکت‌هاست، پیش‌بینی قیمت یا بازده سهام به کمک کشف الگوهای رفتاری فرایند مولد قیمت سهام امکان‌پذیر است، میزان موفقیت در کشف این‌گونه الگوهای رفتاری، میزان کارایی پیش‌بینی را مشخص می‌کند. در واقع فرایند مولد قیمت سهام را می‌توان به عنوان یک الگوی پویا بررسی کرد، فرایند مزبور ممکن است به صورت مدل‌های خطی^۲، مدل‌های غیرخطی^۳ و یا مدل‌های تصادفی^۴ به دست آید.

امروزه یکی از مهمترین موضوعات مورد علاقه اقتصاددانان و تحلیلگران مالی تبیین چگونگی و روند نوسان‌های قیمت‌هاست که راه‌های متفاوت و دیدگاه‌های گوناگونی را در این باره پدید آورده

* استادیار گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.

h_khaloozadeh@eetd.kntu.ac.ir.

** استاد گروه کنترل دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.

sedigh@eetd.kntu.ac.i.

1- Stochastic Differential Equations (SDE).

2- Linear Model.

3- Nonlinear Model.

4- Stochastic Model.

است. در این میان با توجه به در دسترس نبودن اطلاعات دقیق درباره عوامل مؤثر بر نوسان‌های بازار سهام، پیش‌بینی این تغییرات به سادگی میسر نیست و بر این اساس فرضیه بازار کارآمد^۵ مطرح می‌شود، بدین معنا که نوسان‌های قیمت سهام با استفاده از اطلاعات در دسترس و عمومی غیرقابل پیش‌بینی است، در واقع این فرضیه مبتنی بر نظریه گام‌های تصادفی^۶ است، بیان مخالف فرضیه فوق به معنای پیش‌بینی‌پذیری^۷ قیمت‌هاست. از اواسط دهه ۷۰ و مخصوصاً از سال ۱۹۸۰ کوشش‌های جدید و گسترده‌ای در زمینه پیش‌بینی‌پذیری قیمت‌های سهام با استفاده از روش‌های ریاضی جدید، سری‌های زمانی طولانی و ابزارهای پیشرفته‌تر آغاز شد. آزمون‌های زیادی بر روی اطلاعات قیمت و شاخص سهام در کشورهایی مانند انگلستان، آمریکا، کانادا، آلمان و ژاپن صورت گرفت تا وجود ساختاری معین در اطلاعات قیمت سهام نشان داده شود. و از این راه فرضیه گام‌های تصادفی را نقض کنند. از سال ۱۹۹۷ در ایران، در بازار بورس تهران نیز مطالعاتی در این زمینه آغاز شد (خالوزاده بهمن ۱۳۷۷)، با استفاده از نظریه آشوب^۸ که به‌عنوان ابزاری قدرتمند برای تحلیل و پردازش اطلاعات قیمت سهام شناخته شده است، بعد فراکتالی^۹ فرایند مولد قیمت (بازده) سهام محاسبه شد، مقدار به‌دست آمده پیچیدگی فرایند مولد قیمت را نشان می‌دهد و همچنین فرایند سری زمانی مربوطه را از یک فرایند تصادفی و اتفاقی متمایز می‌کند (خالوزاده و دیگران ۸۰ و ۱۳۷۷)، بر پایه تحلیل (R/S)^{۱۰} یا تغییر مبنای حوزه تغییرات سری زمانی قیمت، ماهیت غیرتصادفی فرایند مولد قیمت سهام نشان داده شده و همچنین متوسط تناوب گردش^{۱۱} سری زمانی قیمت به‌دست آمده است (خالوزاده و دیگران ۱۳۷۷).

پیش‌بینی نوسانات قیمت سهام در بازار بورس تهران نیز با استفاده از مدل‌های خطی و مدل‌های غیرخطی (شبکه‌های عصبی غیرخطی) صورت پذیرفته است که در آن پژوهش قابلیت استخراج ساختار فرایند مولد قیمت در شبکه‌های عصبی نشان داده شده است^{۱۲}.

اصولاً پیش‌بینی، عنصری کلیدی برای تصمیم‌گیری‌های مدیریتی است، در یک تصمیم‌گیری، دنباله‌ای از تأثیرات این تصمیم و پیشامدهایی که بعد از تصمیم‌گیری ممکن است رخ دهد، در نظر گرفته می‌شود. قابلیت برآورد این تأثیرات کنترل‌ناپذیر موجب بهبود انتخاب و تصمیم‌گیری خواهد شد. به‌همین خاطر سیستم‌های مدیریتی برای طراحی و کنترل عملگرهای تشکیلاتی خود نیاز به پیش‌بینی دارند. به‌طور کلی می‌توان گفت که پیش‌بینی، برآورد پیشامدهای آینده است و هدف از پیش‌بینی کاهش ریسک در یک تصمیم‌گیری است. پیش‌بینی‌ها معمولاً صحیح نبوده و دارای مقداری خطا هستند که این میزان با داشتن اطلاعات بیشتر در مورد سیستم کاهش می‌یابد. با افزایش هزینه پیش‌بینی می‌توان مقدار ریسک را کاهش داد. اکثراً ارتباطی بین این دو وجود دارد.

5- Efficient Market Hypothesis (EMH).

6- Random Walk.

7- Forecastability.

8- Chaos Theory

9- Fractal Dimension.

10- Rescaled Range Analysis.

11- Mean Orbital Period.

12- Khaloozadeh, H., Khaki Sedigh, A.,(2001).

چون پیش‌بینی همیشه با مقداری خطا همراه است قادر به حذف کامل ریسک نبوده و بنابراین فرایند تصمیم‌گیری مستلزم مقداری عدم یقین ناشی از پیش‌بینی خواهد بود. رابطه بین تصمیم‌گیری و پیش‌بینی را با رابطه زیر می‌توان بیان کرد.

خطای معقولی برای پیش‌بینی + تصمیم‌گیری براساس صحت پیش‌بینی = تصمیم صحیح

۱-۱- رفتار قیمت

ضمن این‌که محققان مالی اغلب معتقد هستند که نوسانات قیمت سهام متغیر با زمان است^{۱۳}، تعداد کمی نیز عقیده دارند که شکل تابعی مشخصی برای این وابستگی زمانی وجود دارد و به‌عنوان مثال نوسانات بازده سهام را به‌عنوان یک فرایند پخش^{۱۴} مدل می‌کنند (استین و دیگران ۱۹۸۷، هال و دیگران ۱۹۸۷، داهیلن و دیگران ۱۹۹۱)^{۱۵}، و نیز تعداد بسیار زیادی از محققان، نوسانات را به صورت فرایندی با مدل‌های ARCH^{۱۶} در نظر می‌گیرند. (چو ۱۹۸۸، اکگیاری ۱۹۸۹، بایلی و دیگران ۱۹۹۰، هینن ۱۹۹۳)^{۱۷}

در سال‌های اخیر با توجه به پیشرفت و رشد تکنیکی بالا، طبقه‌ای از فرایندها به‌نام فرایندهای آشوبگونه^{۱۸} شناسایی و کشف شده است. آشوب مربوط است به فرایندی معین که به‌نظر فرایندی تصادفی می‌رسد وقتی که با روش‌ها و تکنیک‌های مرسوم سری‌های زمانی مطالعه شود. یک فرایند آشوبگونه را می‌توان به‌عنوان یک فرایند غیرخطی و معین تعریف کرد که دارای خواص گشتاور اول و دوم مشابه با سری زمانی تصادفی است (گراسبرگر و دیگران ۱۹۸۳، تاکینز ۱۹۸۰، خالوزاده و دیگران ۱۳۸۲، خالوزاده و دیگران ۲۰۰۴، براک و دیگران ۱۹۸۷)^{۱۹}. این سری زمانی دارای دو مشخصه اصلی است:

الف: از جنبه نظری هیچ نقطه‌ای تکرار نمی‌شود، هر چند در عمل به‌خاطر گرد کردن ارقام محاسباتی این امر اتفاق می‌افتد.

ب: الگوی فرایند رو به‌جلو به‌شدت به شرایط اولیه حساس است.

بنابراین یک پیش‌بینی براساس اطلاعات مبهم، ناصحیح خواهد بود و میزان و مقدار این عدم دقت (نمای لیاپانوف^{۲۰}) به‌طور نمایی با طول دوره زمانی پیش‌بینی افزایش خواهد داشت. جذابیت فرایند آشوب غیرخطی در اقتصاد مالی این است که سیستم‌های آشوبگونه قادر به ایجاد گونه‌های غنی از الگوهای سری زمانی از ساختارهایی نسبتاً ساده هستند.

۲- تعریف صورت مسأله پیش‌بینی

برای تعریف مسأله پیش‌بینی باید از تصمیم‌گیری شروع کرد. اطلاعاتی که از سیستم و فرایند

13- French, K. R., Schwert, G. and Stambaugh, F., (1987).

14- Diffusion Process.

15- Stein et al (1987), Hall et al (1987), Dhillon et al (1991).

16- Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity.

17- Chou R. (1988), Akgiray (1989), Bailey et al (1990), Heynen (1993).

18- Chaotic Process.

19- Grassberger P. et al (1983), Takens F. (1980), Khaloozadeh et al (2004), Brok et al (1987).

20- Lyapunov Exponent.

پیش‌بینی حاصل می‌شود برای بهبود فرایند تصمیم‌به‌کار می‌رود. مطالعه بر روی مسأله تصمیم‌گیری کمک خواهد کرد تا به سؤالاتی در مورد این‌که چه چیزی پیش‌بینی می‌شود، پیش‌بینی به چه شکلی صورت می‌گیرد، چه پارامترهایی درگیر مسأله پیش‌بینی هستند و بالاخره چه میزانی از دقت پیش‌بینی مورد نیاز است، پاسخ داده شود.

۱-۲- سیستم‌های پویا

سیستم‌های پویا، سیستم‌هایی بوده که مقدار خروجی آنها در هر لحظه نه تنها بستگی به مقدار تحریک در آن لحظه داشته بلکه به مقادیر ماقبل نیز بستگی دارد. در برخی سیستم‌های پویا، رابطه ورودی - خروجی به‌گونه‌ای است که در آنها محرک خارجی قابل مشاهده نیست، به این سیستم‌ها، سیستم‌های سری زمانی گفته می‌شود. با استفاده از اطلاعات موجود درباره سیستم سعی می‌شود، ابتدا مدلی به آن اختصاص داده شود تا ارتباط بین متغیرهای سیستم مشخص شود. مدل‌ها به شکل‌های مختلف و درجه‌های متفاوتی از فرمول‌های ریاضی موجودند. برای بعضی از سیستم‌ها مناسب آنست که خواص آن را با جداول عددی و یا نمودار، نمایش دهیم که معمولاً به این‌گونه توصیف، مدل‌های گرافیکی گویند. در بعضی از کاربردهای پیشرفته ممکن است از مدل‌هایی استفاده شود که ارتباط بین متغیرهای سیستم را برحسب جملات ریاضی مانند معادلات دیفرانسیل و یا معادلات تفاضلی ارائه کند. به این‌گونه مدل‌ها، مدل‌های ریاضی و یا تحلیلی گفته می‌شود. مدل‌های ریاضی ممکن است پیوسته یا گسسته با زمان^{۲۱}، معین یا تصادفی^{۲۲}، خطی و یا غیرخطی باشند. مدل‌های ریاضی در تمام شاخه‌های علوم مانند اقتصاد، زیست‌شناسی، پزشکی و مهندسی کاربرد دارد. همچنین از این مدل‌ها می‌توان به‌عنوان ابزاری برای شبیه‌سازی و پیش‌بینی استفاده کرد.

۲-۲- ساخت مدل

یک مدل با استفاده از اطلاعات ورودی - خروجی سیستم و تحلیل این اطلاعات توسط روش‌های ریاضی ساخته می‌شود. به این روش، شناسایی سیستم^{۲۳} گفته می‌شود. برای ساختن یک مدل با استفاده از اطلاعات مشاهده شده چهار عامل زیر لازم است:

اطلاعات،

مجموعه‌ای از مدل‌های داوطلب (این مدل‌ها به روش شناسایی بستگی دارد)،

قانون و معیاری که توسط آن مدل برتر انتخاب شود،

برآورد و ارزیابی مدل^{۲۴}.

پس از این‌که مدل انتخاب شد، باید آزمایش کرد که آیا این مدل باندازه کافی مناسب و دقیق

است یا خیر؟

21- Continuous or Discrete Time.

22- Deterministic or Stochastic.

23- System Identification.

24- Model Validation.

روش‌های متفاوتی وجود دارد که ارتباط مدل را با اطلاعات مشاهده شده نشان می‌دهد.

۲-۳- حلقه شناسایی سیستم

روش شناسایی سیستم دارای یک چرخه طبیعی است، ابتدا جمع‌آوری اطلاعات صورت گرفته، بعد از آن مجموعه‌ای از مدل‌ها انتخاب می‌شوند و سپس بهترین مدل در این مجموعه انتخاب می‌شود. یک مدل ممکن است بنا به دلایل زیر قابل قبول و کارا نباشد.

- روند محاسباتی برای پیدا کردن بهترین مدل براساس معیار مورد نظر، با مشکل مواجه شود.
- معیار و محک سنجش مدل به درستی انتخاب نشده باشد.
- کلیه اعضای مجموعه مدل نامناسب بوده و دارای هیچ عضوی که سیستم را به خوبی بیان کند، نباشد.

- مجموعه اطلاعات جمع‌آوری شده باندازه کافی غنی نبوده و مدل مناسب توسط این اطلاعات قابل شناسایی نباشد.

از مهمترین روش‌های متداول کلاسیک در رابطه با شناسایی سیستم‌ها می‌توان به روش‌های پارامتری اشاره کرد.

۳- روش‌های شناسایی پارامتری خطی

در این روش‌ها ابتدا ساختاری مشخص به سیستم نسبت داده می‌شود. سپس با استفاده از روش‌های آماری و اطلاعات ورودی - خروجی با یکسری مفروضات در مورد خواص آماری اطلاعات از جمله میزان پراکندگی، میانگین، نوع تابع توزیع و ... پارامترهای مجهول این ساختار به دست می‌آیند. ساختار کلی مدل‌های پارامتری به شکل زیر است:

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t - n_k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (1)$$

A, B, C, D, F چند جمله‌ای‌هایی با عملگرهای تأخیر هستند با درجات تأخیر خاص متناظر. $u(t)$ ورودی، $y(t)$ خروجی فرایند و $e(t)$ نویز موجود در سیستم است. بسته به این که از کدام چند جمله‌ای‌ها در ساختار کلی فوق استفاده شود، مدل‌های مختلفی رامیتوان داشت. با استفاده از گونه‌های مختلف روش بهینه‌سازی حداقل مربعات، ضرایب مدل انتخابی به گونه‌ای برآورد می‌شوند تا میانگین مربع خطای بین خروجی‌های مدل و خروجی‌های مشاهده شده، سیستم کمینه شود. بسته به این که از کدام چند جمله‌ای‌ها در ساختار کلی فوق استفاده شود، مدل‌های معروف $FIR, ARX, ARMA, ARMAX, ARIMA, BJ$ و غیره را خواهیم داشت^{۲۵}.

تخمینگرهای حداقل مربعات، براساس ایده ساده برازش خروجی مدل به خروجی مشاهده شده شکل گرفته‌اند و ثابت می‌شود، این تخمینگرها دارای خواص آماری قابل توجه و تحت فرضی‌های خاصی هستند، مثلاً از نظر کمینه شدن کوواریانس خطا در میان تخمینگرهای خطی و بدون

۳-۱- معیار ارزیابی رگرسیون

می‌توان، با استفاده از مانده‌های^{۲۸} مدل رگرسیون معیاری ساخت که با آن خوبی و برازندگی مدل را با داده‌ها اندازه گرفت. مدل رگرسیونی بد، مانده‌های بزرگ و مدل رگرسیونی خوب مانده‌های کوچک دارد. معیار استفاده شده در این مقاله مستقل از واحد اندازه‌گیری متغیرهای مدل برآورد است، این معیار عبارتست:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{var}(\varepsilon_N)}{\text{var}(r_N)}, 0 \leq R^2 \leq 1 \quad (۲)$$

که البته در عمل از برآورد واریانس به‌وسیله تقریب‌های زیر استفاده می‌شود. عبارت معادل برای فرضیه بازار کارا که در اینجا از آن استفاده می‌شود این گونه است:

$$\text{Var}(r_N) = \text{Var}(\varepsilon_N) \quad (۳)$$

و یا به‌طور معادل:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{Var}(\varepsilon_N)}{\text{Var}(r_N)} = 1 - 1 = 0 \quad (۴)$$

بنابراین شواهد تجربی که $R^2 \neq 0$ در جهت کارایی بازار بوده و شواهدی که $R^2 = 0$ هم با کارایی بازار و هم با وجود ساختار غیرخطی موافق است و همخوانی دارد. چون تابع توزیع احتمال^{۲۹} سری زمانی مانده‌ها و سری زمانی اصلی نامعین است، R^2 با رابطه زیر برآورد می‌شود:

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{\hat{\text{Var}}(\varepsilon_N)}{\hat{\text{Var}}(r_N)} \quad (۵)$$

که در آن:

$$\hat{\text{var}}(r_N) = \frac{\sum_{n=1}^N (r_n - \hat{r})^2}{N-1}, \hat{\text{var}}(\varepsilon_N) = \frac{\sum_{n=1}^N (r_n - \bar{r})^2}{N-1}, \bar{r}_N = \frac{\sum_{n=1}^N r_n}{N} \quad (۶)$$

در این رابطه \hat{R}^2 یا بازده تخمین، به‌عنوان معیاری برای خوبی مدل استفاده می‌شود، در واقع \hat{R}^2 جزئی از انحرافات کل است که توسط مدل خطی بیان شده است.

۴- پیش‌بینی قیمت سهام بر اساس مدل بلاک و شولز

از مهم‌ترین پیشرفت‌ها در بازارهای مالی نوین، مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله بلاک و شولز^{۳۰}

26- Unbiased.

27- Scheweppe, F. C. , (1973).

28- Residuals.

29- Probability Density Function.

30- Black and Schols Option Pricing Model (BSOPM).

(BSOPM) است^{۳۱}. در این مدل فرض بر آنست که واریانس بازده سهام معین است. یکی از فرضیه‌های اساسی در به‌دست آوردن مدل قیمت‌گذاری بلاک و شولز^{۳۲} آنست که قیمت سهام مورد نظر دارای توزیع log-normal با نوسانات ثابت باشد. اگر فرض ثابت بودن نوسانات برقرار نباشد ولی این نوسان‌ها از یک تابع معین (حتی متغیر با زمان) پیروی کند^{۳۳}، اساس بازیابی این مدل تغییری نخواهد کرد و در این صورت نوسانات لحظه‌ای در مدل اصلی B&S به صورت متوسط نوسانات لحظه‌ای لحاظ می‌شود.

۴-۱- مدل پیش‌بینی قیمت سهام بر اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی

در معادلات دیفرانسیل تصادفی، دو نوع ماهیت تصادفی می‌توان در نظر گرفت، گروهی از این معادلات دارای حل مشتق‌پذیر و گروهی دیگر مشتق‌ناپذیرند. هر یک از این دو گروه راه‌حلهایی را ارائه می‌دهند که با یکدیگر به‌طور اساسی متفاوتند. گروه اول، راه‌حلهای ساده‌تری داشته و شامل معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب تصادفی یا مقدار اولیه تصادفی یا ورودی‌ای تصادفی با خواص منظم و معین و یا حتی ترکیبی از حالات مذکورند. به‌عنوان مثال معادله دیفرانسیل خطی زیر:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = a(\omega)x(t) + b(t, \omega) \quad (7)$$

که b ورودی تصادفی است و به‌ازای هر ω نسبت به زمان پیوسته است. این معادله با مقدار اولیه $x_0(\omega)$ در $t = 0$ دارای حلی به شکل زیر است:

$$x(t, \omega) = e^{a(\omega)t} (x_0(\omega) + \int_0^t e^{-a(\omega)s} b(s, \omega) ds) \quad (8)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود جواب‌های به‌دست آمده از حل این معادله توابعی مشتق‌پذیر نسبت به زمان هستند. دومین طبقه یا گروه، معادلاتی هستند که ورودی آنها، فرایندی تصادفی نامنظم مانند نویز سفیدگوسی^{۳۴} است. این معادلات به‌عنوان معادلات دیفرانسیل تصادفی محسوب می‌شوند و به صورت معادلات با انتگرال‌های تصادفی ایتو و یا استراتنویچ^{۳۵} بیان می‌شوند. این‌گونه معادلات دارای حلی مشتق‌پذیر نیستند (به‌خاطر وجود جملاتی بر حسب فرایندهای وینر در انتگرال تصادفی مربوطه). فرایند Itô نمونه‌ای از این گروه است.

مدل‌های تصادفی دارای دو قسمت اصلی هستند. یک قسمت نشان‌دهنده متوسط تغییرات یا لغزش^{۳۶} در هر لحظه است و قسمت دیگر نوسانات لحظه‌ای فرایند را مدل می‌کند:

$$dx(t) = m(x(t), t)dt + s(x(t), t) dz(t) \quad (9)$$

در بیشتر مدل‌ها مؤلفه لغزش با استفاده از روش‌های عددی برای تطابق با نقطه اولیه به‌دست می‌آید ضمن این‌که برای تعداد کمی از مدل‌ها یک رابطه تحلیلی نیز موجود است^{۳۷}.

31- Black, F. and Scholes, M., (1973).

32- B&S.

33- Brockman, P. and et. al., (1997).

34- Guassian White Noise.

35- Stranovich Integrals.

36- Drift.

37- Oksendal, B., (1991).

در مدل سازی به روش معادلات دیفرانسیل تصادفی، رفتار فرایند مورد مطالعه به عنوان یک فرایند Ito در نظر گرفته می شود.

در این تحقیق قیمت سهام به عنوان یک فرایند Ito در نظر گرفته می شود. یک فرایند Ito $x = \{x(t); t \geq 0\}$ به شکل عمومی زیر است:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s, x(s)) ds + \int_0^t b(s, x(s)) d\omega(s); t \geq 0 \quad (10)$$

این رابطه شامل مقدار اولیه $x(t_0) = x_0$ است که امکان دارد تصادفی بوده، دارای یک مؤلفه متغیر با زمان با تغییرات آهسته به نام لغزش و یک مؤلفه تصادفی پیوسته با تغییرات سریع با زمان به نام پخش^{۳۸} است. انتگرال دوم در معادله فوق یک انتگرال تصادفی Ito نسبت به فرایند وینر $\omega = \{\omega(t); t \geq 0\}$ ^{۳۹} نامیده می شود. معادله انتگرال فوق، اغلب به شکل دیفرانسیل زیر نوشته می شود:

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + b(t, x(t))d\omega(t); t \geq 0 \quad (11)$$

به معادله فوق، معادله دیفرانسیل تصادفی گفته می شود^{۴۰}، حل معادله دیفرانسیل تصادفی عموماً پیچیده بوده و تنها حالات خاصی وجود دارد که راه حل های آنها شناخته شده است. با وجود راه حل های عمومی ارائه شده توسط محققان، فاصله بین پیشرفت های نظری معادلات دیفرانسیل تصادفی با کاربرد عملی آن بسیار زیاد است.

فرایند وینر $\omega(t)$ در هیچ نقطه مشتق پذیر نیست. بنابراین جمله دوم در معادله انتگرالی (۱۱) مانند یک انتگرال لبگ^{۴۱} و یا انتگرال ریمان^{۴۲} معمولی نیست و روابط معادلات مربوط به انتگرال گیری آن با انتگرال های متداول ذکر شده متفاوت است به طوری که:

$$\int_0^t W(s, \omega) dW(s, \omega) = \frac{1}{2} W^2(t, \omega) - \frac{1}{2} t \quad (12)$$

در حالی که در انتگرال لبگ داریم:

$$\int_0^t W(s) dW(s) = \frac{1}{2} W^2(t) \quad (13)$$

خاصیت بسیار مهمی که یک فرایند وینر دارد به صورت $E[(d\omega(t))^2] = dt$ است، با وجود این خاصیت برای هر $t \geq t_0$ می توان فرایند تصادفی $Y(t)$ را به شکل زیر تعریف کرده و از آن دیفرانسیل گیری کرد:

$$Y(t, \omega) = U(t, x(t, \omega)) \quad (14)$$

که $U(t, x)$ تابعی پیوسته دارای مشتق جزئی مرتبه دوم و $x(t)$ نیز انتگرال Ito است، در واقع:

$$x(t, \omega) = \int_{t_0}^t f(s, \omega) dW(s, \omega)$$

38- Fusion.

۳۹- فرایند وینر انتگرال نویز سفید است و به فرایند براونی نیز نامیده می شود.

40- SDE.

41- Lebesgue Integral.

42- Riman Integral.

و یا به صورت معادله دیفرانسیلی:

$$dx(t) = f(t, \omega)d\omega(t)$$

با استفاده از قاعده زنجیری^{۴۳} در دیفرانسیل گیری $Y(t)$ می توان نوشت:

$$dY(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t))dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t))dx(t)$$

$$\Delta Y(t) = u(t + \Delta t, x(t) + \Delta x(t)) - u(t, x(t)) =$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \Delta t \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\Delta x)^2 \right\} + O(3)$$

$$dY(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t))dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t))dx(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x(t))dx^2(t) \quad (15)$$

این رابطه، قاعده زنجیری در معادلات دیفرانسیل تصادفی بوده و به نام فرمول Ito نامیده می شود. با توجه به معادله دیفرانسیل (۱۵) جمله ای اضافی که در قاعده زنجیری معمولی وجود ندارد در این رابطه دیده می شود.

۳-۴- قیمت سهام

با در نظر گرفتن نوسانات شبه تصادفی در قیمت سهام در بازار بورس، مدل کردن دینامیک قیمت ها با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی، به نظر طبیعی می رسد. مرتن^{۴۴} یکی از اولین کسانی است که از این نظریه استفاده کرد. مدل پیشنهادی او شامل ایده های اساسی بود که در حال حاضر نیز مورد استفاده قرار می گیرد. مرتن شخص سرمایه گذاری را در نظر گرفت که دو نوع استراتژی سرمایه گذاری را انتخاب کرده یکی سرمایه گذاری با ریسک و دیگری بدون ریسک. شخص سرمایه گذار باید انتخاب خود را به گونه ای انجام دهد که تابع هزینه ای را کمینه کند و یا این که تابع درآمدی را بیشینه کند. مرتن ارزش سرمایه گذاری بدون ریسک (P_s) را به طور نمایی افزایشی با زمان فرض کرد (مانند سپرده با سود ثابت تضمینی) که با معادله دیفرانسیل معمولی زیر بیان می شود:

$$\dot{P}_s = rP_s ; r > 0 \quad (16)$$

سرمایه گذاری با وجود ریسک در مدل پیشنهادی مرتن (P_r) در معادله ای مشابه با معادله فوق صدق کرده با این تفاوت که این معادله شامل نوسانات تصادفی متناسب با شدت نوسانات قیمت در نظر گرفته می شود یعنی:

$$\dot{P}_r = \alpha P_r + \sigma P_r \zeta_t \quad (17)$$

که ζ_t یک فرایند نویز سفیدگوسی بوده و به صورت یک معادله دیفرانسیل تصادفی Ito به شکل زیر تعریف می شود:

$$dP_r^I = \alpha P_r^I dt + \sigma P_r^I dW_t \quad (18)$$

که $\{W_t; t \geq 0\}$ یک فرایند وینر استاندارد است. α و σ ثوابت مثبتی بوده و چون سرمایه گذاری با وجود ریسک حداقل در صورت احتمال موفقیت پرمفعت تر از سرمایه گذاری بدون ریسک

43- Chain Rule.

44- Merton, R., (1973).

است $r < \alpha$. در این معادله α بازده مورد انتظار لحظه‌ای سهام، σ واریانس لحظه‌ای نرخ بازده و dW_t یک فرایند وینر - گوس استاندارد است. α می‌تواند متغیری تصادفی باشد که به قیمت سهام یا بازده سرمایه‌های دیگر بستگی داشته باشد. σ متغیری غیرتصادفی فرض می‌شود. σ می‌تواند مقدار ثابتی نباشد و مثلاً تابعی شناخته شده از زمان باشد.

برای حل معادله دیفرانسیل تصادفی فوق ابتدا تغییر متغیر $Y_t = U(P_t) = \log(P_t)$ را داده و سپس با استفاده از قانون دیفرانسیل‌گیری معادلات دیفرانسیل تصادفی و به‌کارگیری فرمول ایتو می‌توان نوشت:

$$dY_t = \frac{\partial U}{\partial t}(t, P_t)dt + \frac{\partial U}{\partial P_t}(t, P_t)dP_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial P_t^2}(t, P_t)dP_t^2$$

$$dP_t^{r^2} = (\alpha P_t^r dt + \sigma P_t^r dW_t)^2 \quad (19)$$

$$= \alpha^2 P_t^{r^2} dt^2 + 2\alpha P_t^r \sigma P_t^r dt dW_t + \sigma^2 P_t^{r^2} dW_t^2$$

با توجه به روابط موجود در ریاضیات مربوط به معادلات دیفرانسیل تصادفی، می‌توان نوشت:

$$\langle dt, dt \rangle = \langle dW_t, dt \rangle = 0; \langle dW_t, dW_t \rangle = dW_t^2 = dt \quad (20)$$

در این صورت رابطه (۱۹) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$dP_t^{r^2} = 0 + 0 + \sigma^2 P_t^{r^2} dW_t^2 = \sigma^2 P_t^{r^2} dt \quad (21)$$

و به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$dY_t = d(\log P_t^r) = 0 + \frac{dP_t^r}{P_t^r} - \frac{1}{2} \frac{1}{P_t^{r^2}} \sigma^2 P_t^{r^2} dt = \frac{dP_t^r}{P_t^r} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt$$

$$\frac{dP_t^r}{P_t^r} = \alpha dt + \sigma dW_t$$

$$d(\log P_t^r) = \alpha dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt = (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dW_t \quad (22)$$

بنابر این می‌توان نوشت:

$$\Delta(\log P_t^r) = (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)(t - t_0) + \sigma (W_t - W_{t-1}) \quad (23)$$

برای $t_0 = 0$ و $P(t_0) = P_0$ خواهیم داشت:

$$P_{t-1} = P_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)(t-1) + \sigma W_{t-1}}, \quad P_t = P_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W_t} \quad (24)$$

و بالاخره از تقسیم دو رابطه فوق فرمول مبین قیمت سهام بر اساس مدل‌سازی معادلات دیفرانسیل تصادفی به‌دست می‌آید:

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = e^{[(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W_t] - [(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)(t-1) + \sigma W_{t-1}]}$$

$$= e^{[(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2) + \sigma (W_t - W_{t-1})]}$$

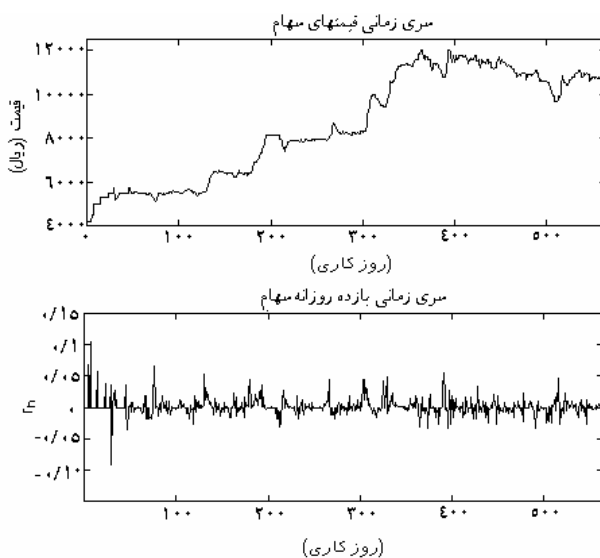
$$P_t = P_{t-1} e^{[(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(W_t - W_{t-1})]} \quad (25)$$

۵- نتایج حاصل از شبیه‌سازی

در اینجا نتایج حاصل از پیش‌بینی قیمت سهام با استفاده از مدل‌های خطی و مدل‌های معادلات دیفرانسل تصادفی ارائه می‌شود. ابتدا پیش‌بینی قیمت روز بعد شبیه‌سازی شده و سپس افق پیش‌بینی را به اندازه ۱۵ و ۳۰ افزایش می‌دهیم، در هر مورد عملکرد مدل با مقادیر واقعی مقایسه شده‌اند. نرخ بازدهی روزانه^{۴۵} سهام شرکت شهد-ایران (r_n) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_n = \frac{P_n - P_{n-1} + d_n}{P_{n-1}}$$

در این رابطه P_n قیمت در روز n ام و d_n سود تقسیم شده در این روز است، سود مزبور ممکن است به صورت پرداخت نقدی، سهام جایزه یا افزایش سرمایه باشد. شکل (۱-الف) و (۱-ب) به ترتیب، قیمت سهام شهد-ایران و نرخ بازدهی روزانه این سهم را نشان می‌دهد.



نمودار ۱-الف و ۱-ب- نمودار قیمت سهام شهد-ایران و نرخ بازدهی روزانه (r_n)

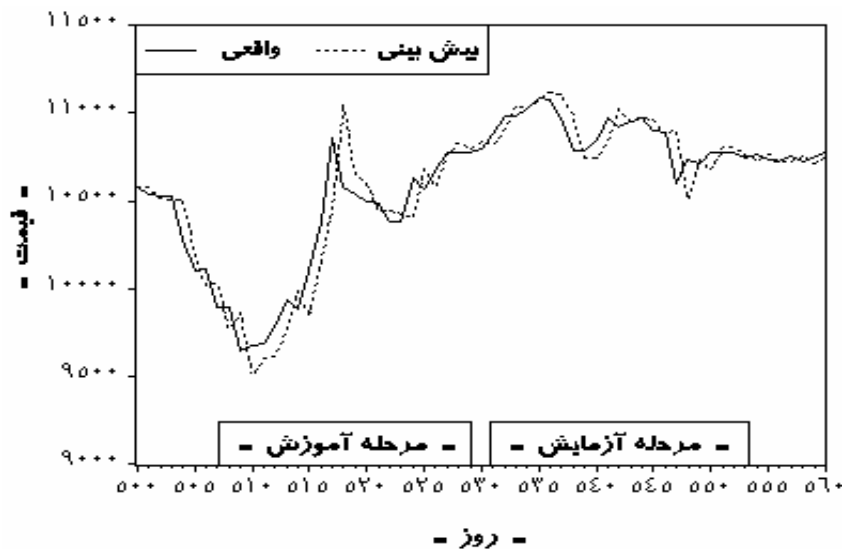
۵-۱- مدل خطی: پیش‌بینی یک مرحله بعد قیمت و بازده روزانه سهام شهد-ایران

برای مدل‌سازی خطی با ساختار $ARM(p, q)$ ، در صورت ایستا نبودن سری زمانی با استفاده از عملگر تفاضل با درجه d سری زمانی جدیدی ساخته می‌شود (متناظر با مدل خطی با ساختار $ARIMA(p, d, q)$). باید توجه کرد که حداقل d به دست آمده برای ایستا کردن سری زمانی، لزوماً بهترین مدل و برآورد را به دست نمی‌دهد و معمولاً برای داشتن مدلی با بازده برآورد بالاتر و کارایی بیشتر به $d > d_{min}$ احتیاج است. در اینجا، بهترین مدل به دست آمده برای قیمت دارای ساختار $ARIMA(3, 3, 2)$ بوده و می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$\hat{\nabla}^3 P_t = -1.480651 \nabla^3 P_{t-1} - .924503 \nabla^3 P_{t-2} - .351964 \nabla^3 P_{t-3} - .159362 e_{t-1} - .828186 e_{t-2} \quad (26)$$

که $\nabla^3 P_t = P_t - 3P_{t-1} + 3P_{t-2} - P_{t-3}$ برابر است با:

پارامترهای برآوردی و مشخصات آماری این مدل در جدول ۱ آمده است. شکل ۲ مشاهدات سری زمانی قیمت شهد- ایران و خروجی‌های مدل را در مرحله آموزش و آزمایش نشان می‌دهد.



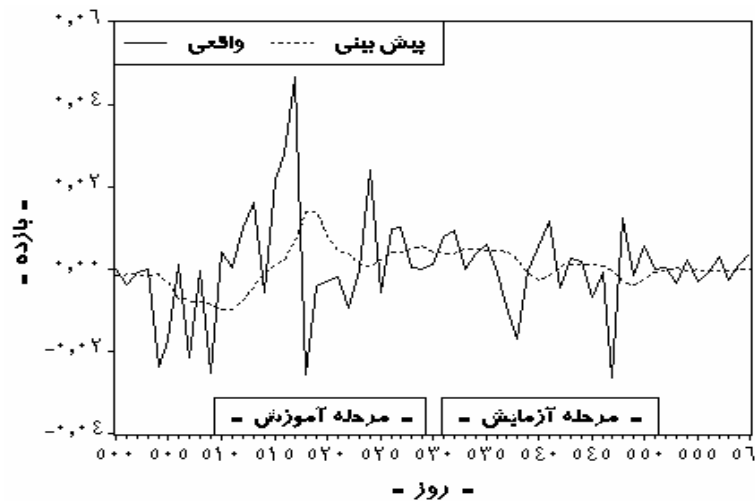
نمودار ۲- پیش‌بینی قیمت روز بعد با استفاده از مدل خطی با ساختار ARIMA(3, 3, 2)

جدول ۱- ضرایب و مشخصات آماری مدل خطی تخمینی قیمت شهد- ایران

LS // Dependent Variable is D[SH, ۲]				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob
AR[۱]	-۱.۴۸۰۶۵۱	۰.۰۸۷۱۸۸	-۱۶.۹۸۲۳۷	۰.۰۰۰۰۰
AR[۲]	-۰.۹۲۴۵۰۳	۰.۰۷۹۶۹۷	-۱۱.۶۰۰۲۴	۰.۰۰۰۰۰
AR[۳]	-۰.۳۵۱۹۶۴	۰.۰۴۴۹۶۵	-۷.۸۲۷۴۹۳	۰.۰۰۰۰۰
MA[۱]	-۰.۱۵۹۳۶۲	۰.۰۷۶۴۸۹	-۲.۰۸۳۴۴۵	۰.۰۳۷۷
MA[۲]	-۰.۸۲۸۱۸۶	۰.۰۸۲۵۳۳	-۱۰.۰۳۴۶۶	۰.۰۰۰۰۰
R-squared	۰.۷۷۵۲۷۴	Mean dependent var		-۰.۶۰۷۲۸۷
Adjusted R-squared	۰.۷۷۳۵۳۶	S.D. dependent var		۲۶۱.۰۲۱۱
S.E. of regression	۱۲۴.۲۱۵۳	Akaike info criterion		۹.۶۵۴۱۰۲
Sum squared resid	۰.۷۵۴۴۹۹۴	Schwartz criterion		۹.۶۹۶۶۳۸
Log likelihood	-۳۰۸۰.۵۱۹	F-statistic		۴۲۱.۹۸۷۱
Durbin-Watson stat	۲.۰۹۷۳۳۹	Prob[F-statistic]		۰.۰۰۰۰۰
Inverted AR Roots	-.۳ - .۵۶i	-.۲ + .۵۶i	-.۸۹	
Inverted MA Roots	.۹۹	-.۸۳		

با بررسی توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی باقیمانده‌های مدل قیمت ARIMA(۳و۳و۲) به ازای ۲۵ تأخیر و قرار داشتن مقادیر این توابع در زیر حد فاصل مرسوم می‌توان

نتیجه گرفت خطای برآورد تصادفی بوده و در نتیجه برازش مدل به خوبی صورت گرفته است. در واقع، طبق آمار کلاسیک می توان انتظار داشت که ساختار خطی بجا مانده‌ای در سری زمانی باقیمانده‌های قیمت در این مدل وجود ندارد. به همین ترتیب مدل تخصیص یافته به فرایند مولد سری زمانی بازده سهام شهد- ایران دارای ساختار $ARIMA(2, 2, 3)$ خواهد بود که به خاطر ایجاز، از آوردن جدول مربوطه صرفنظر می‌شود. مشاهدات سری زمانی بازده شهد- ایران و خروجی‌های مدل در دو مرحله آموزش و آزمایش در شکل ۳ رسم شده است.



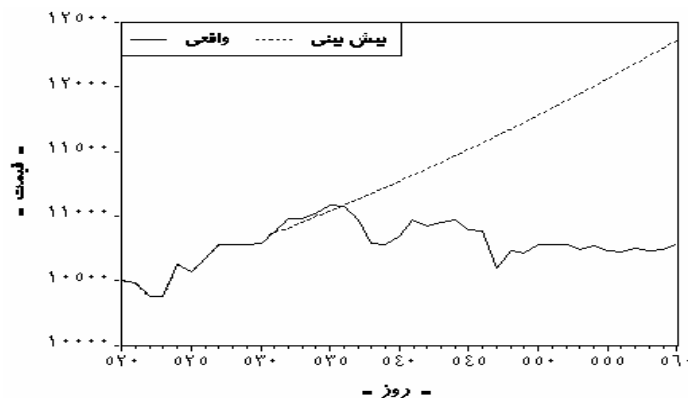
نمودار ۳- پیش‌بینی بازده روز بعد سهام شهد- ایران، با استفاده از مدل خطی با ساختار $ARIMA(2, 2, 3)$

مقدار R^2 در مرحله آموزش $R^2 = 0.45$ و در مرحله آزمایش $R^2 = 0.4$ است.

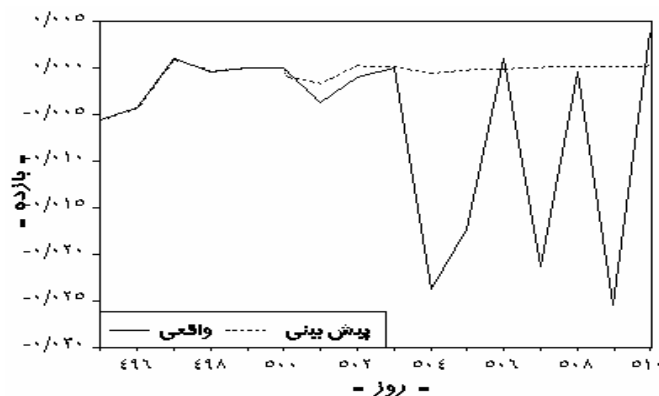
۵-۲- مدل خطی: پیش‌بینی دراز مدت قیمت و بازده سهام شهد- ایران

پیش‌بینی‌های صورت گرفته با مدل‌های تخصیص یافته فوق و شکل‌های مندرج در قسمت‌های قبل مربوط به پیش‌بینی قیمت مرحله زمانی بعد و بازده مرحله زمانی بعد است. از آنجایی که در این پژوهش از اطلاعات روزانه استفاده شده است، پیش‌بینی قیمت روز $t+46$ بعد و بازده روز بعد سهام تهران ممکن است چندان مفید نباشد، در مدل‌های به‌دست آمده، پیش‌بینی روز $k+1$ براساس اطلاعات واقعی در زمان‌های $k, k-1, k-2, \dots$ صورت می‌گیرد، در حالی که اگر شناسایی فرایند مولد سری زمانی صورت گرفته باشد رفتار فرایند با وجود ورودی‌ها و شرایط اولیه کاملاً مشخص شده و در مرحله پیش‌بینی نیازی به اطلاعات واقعی روزهای آتی نخواهد بود. در واقع اگر از مدل‌های به‌دست آمده برای پیش‌بینی با افق بیشتر از یک مرحله استفاده شود، برای $k+T$ لازم است در مدل‌های مربوطه تنها از اطلاعات برآوردی خروجی استفاده شود. یعنی در طی فرایند رو به جلو پیش‌بینی، از خروجی‌های مدل خطی (بجای مقادیر واقعی) استفاده شود، شکل‌های ۴ و ۵

به ترتیب نشان دهنده عملکرد مدل های به دست آمده قیمت و بازده سهام با افق پیش بینی برای ۱۰ و ۲۰ روز است.



نمودار ۴- پیش بینی قیمت ۳۰ روز آینده سهام شهد- ایران با استفاده از مدل خطی



نمودار ۵- پیش بینی بازده سهام شهد- ایران در ۱۰ روز آینده با استفاده از مدل خطی

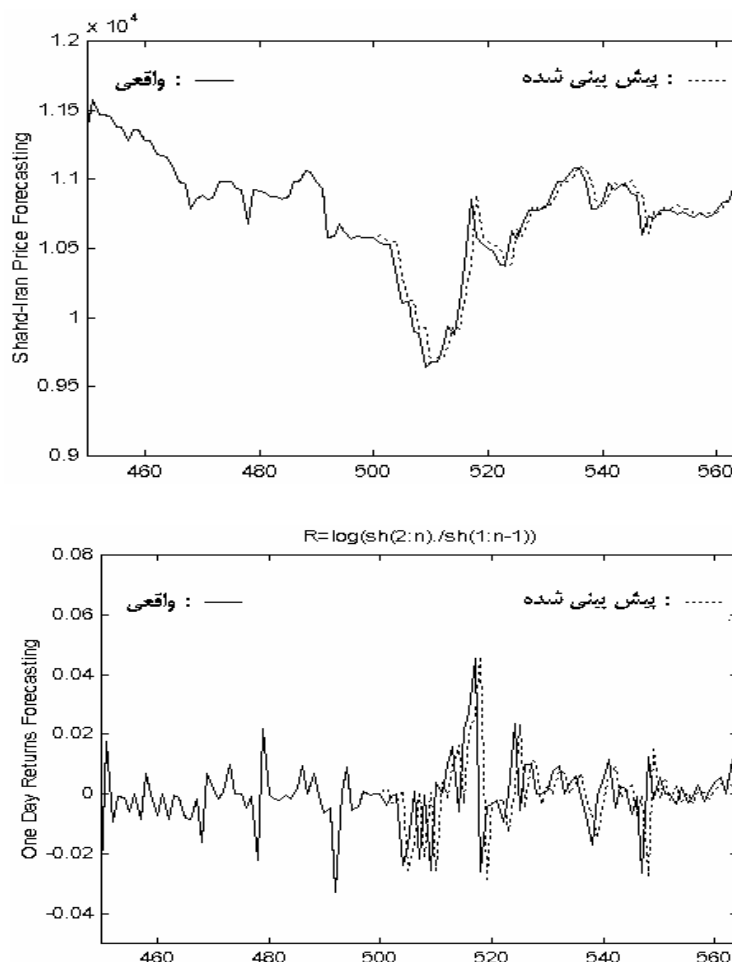
دیده می شود که مدل های به دست آمده به حالت های اولیه (قیمت و بازده تخمینی گذشته) بسیار حساس هستند به طوری که مقداری خطا در برآورد قیمت (بازده) روز بعد خطای بسیار زیادی را پیش بینی های روزهای بعد ایجاد می کند، در بررسی های انجام شده، نشان داده شده است که مدل های خطی کارایی لازم برای فرایند پیش بینی دراز مدت را ندارند. پیچیده تر کردن مدل مورد مطالعه نیز بهبود قابل ملاحظه ای در پیش بینی درازمدت حاصل نمی کند می توان ادعا کرد که مدل های خطی، به خاطر پیچیدگی فرایند مولد سری زمانی، قادر به بازسازی و احیای دینامیک فرایند مربوطه نبوده و برای پیش بینی درازمدت کارایی لازم را ندارند. این گونه رفتار، شبیه آشوبگونه^{۴۷} و شبه تصادفی بودن فرایند مولد قیمت (بازده) را ایجاد می کند (خالوزاده و دیگران ۸۰ و ۱۳۷۷).

۵-۳- مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی: پیش بینی یک مرحله بعد قیمت و بازده روزانه سهام شهد-

ایران

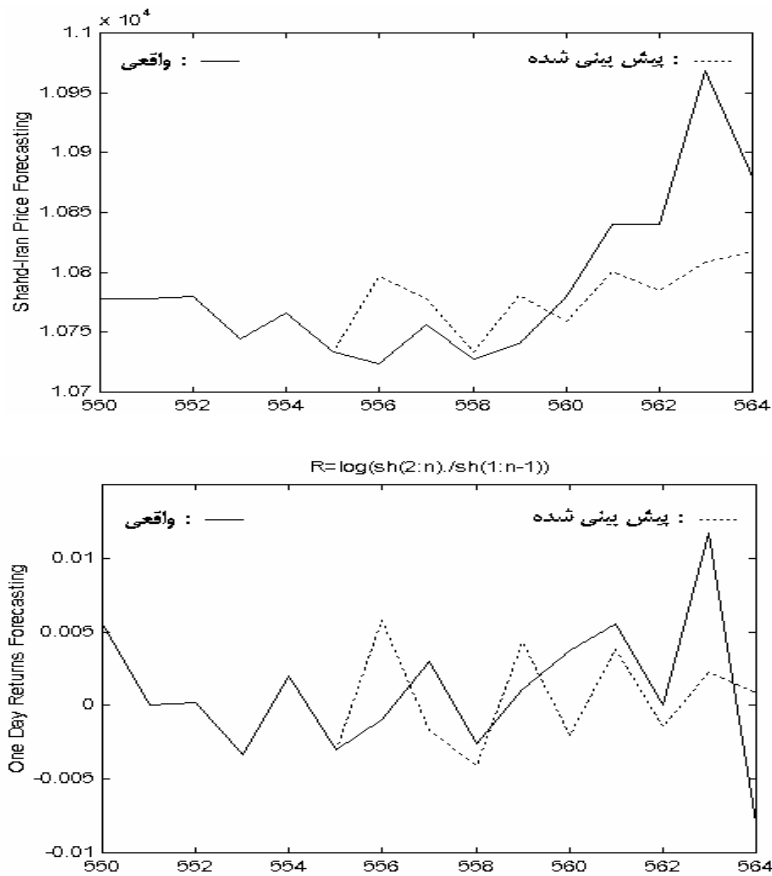
با استفاده از سری زمانی مربوط به بازده روزانه سهام، σ را برابر با انحراف معیار سری زمانی مربوطه و α را نیز برابر با میانگین سری زمانی بازده روزانه در نظر گرفته و شبیه‌سازی‌های مربوط را انجام می‌دهیم. شکل‌های (۶-الف) و (۶-ب) به ترتیب نشان‌دهنده پیش‌بینی قیمت روز بعد سهام شهد-ایران و پیش‌بینی نرخ بازدهی روزانه (r_{11}) بوده که از حل معادله دیفرانسیل تصادفی ذکر شده با افق پیش‌بینی یک روز حاصل شده است. برای مقایسه بهتر در هر مورد مقدار واقعی متناظر نیز رسم شده است.

مقدار R^2 برای سری زمانی قیمت عبارت است از: $R^2 = 0.86$ و برای سری زمانی بازده عبارت است از $R^2 = 0.81$.



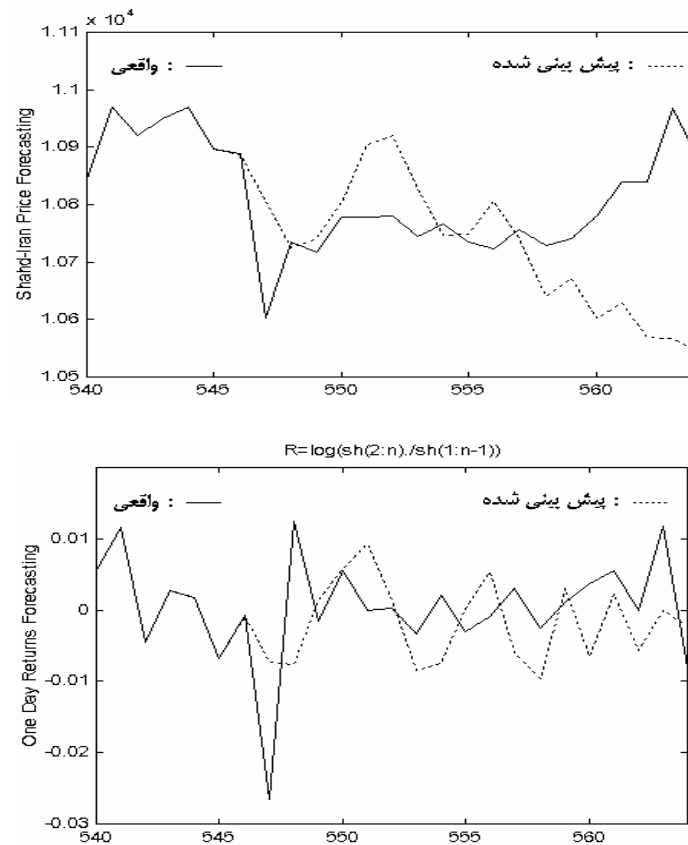
نمودارهای ۶-الف و ۶-ب - پیش‌بینی قیمت روز بعد سهام شهد-ایران و پیش‌بینی نرخ بازدهی روزانه (r_{11}) با استفاده از مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی

شکل‌های (۷-الف) و (۷-ب) به ترتیب نشان‌دهنده پیش‌بینی قیمت سهام شهد-ایران و پیش‌بینی نرخ بازدهی روزانه (r_{11}) بوده که از حل معادله دیفرانسیل تصادفی ذکر شده با افق پیش‌بینی ۱۵ روز حاصل شده است. برای مقایسه، مقدار واقعی متناظر نیز رسم شده است.



نمودارهای ۷-الف و ۷-ب- پیش‌بینی قیمت سهام شهید-ایران و پیش‌بینی نرخ بازدهی روزانه (I_n) با افق پیش‌بینی ۱۵ روز با استفاده از مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی

شکل‌های (الف-۸) و (ب-۸) به ترتیب نشان‌دهنده پیش‌بینی قیمت سهام شهید-ایران و پیش‌بینی نرخ بازدهی روزانه (I_n) بوده که از حل معادله دیفرانسیل تصادفی ذکر شده با افق پیش‌بینی ۲۵ روز حاصل شده است. برای مقایسه در هر مورد مقدار واقعی متناظر نیز رسم شده است.



نمودارهای ۸- الف و ۸- ب- پیش بینی قیمت سهام شهد- ایران و پیش بینی نرخ بازدهی روزانه (I_n) با افق پیش بینی ۲۵ روز با استفاده از مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی

۶- نتیجه گیری

در این قسمت با استفاده از ریاضیاتی خاص که به معادلات دیفرانسیل تصادفی معروف است، مدل سازی قیمت سهام صورت پذیرفت. با استفاده از اطلاعات مربوط به قیمت (بازده) شرکت شهد- ایران، نشان داده شده که با به کارگیری مدل های خطی می توان با خطای کمی قیمت (بازده) روز بعد را پیش بینی کرد. لیکن مدل های به دست آمده به حالت های اولیه (قیمت و بازده برآوردی گذشته) بسیار حساس هستند به طوری که مقداری خطا در برآورد قیمت (بازده) روز بعد خطای بسیار زیادی را پیش بینی های روزهای بعد ایجاد می کند، پس مدل های خطی کارایی لازم را برای فرایند پیش بینی دراز مدت ندارند. پیچیده تر کردن مدل مورد مطالعه نیز بهبود قابل ملاحظه ای در پیش بینی درازمدت حاصل نمی کند. در مقابل پیش بینی بر اساس مدل های تصادفی چون از واریانس و میانگین (گشتاورهای مرتبه اول و دوم) سری زمانی در فرایند پیش بینی استفاده می شود عملکردی بهتری داشته و بر خلاف مدل خطی در پیش بینی دراز مدت به نقاط ثابت و یا خطوطی با شیب ثابت همگرا نمی شوند.

فهرست منابع

۱- خالوزاده، حمید، خاکی صدیق، علی، لوکس، کارو، (۱۳۸۰)، بررسی روند نوسانات قیمت سهام در بازار

- بورس، کنفرانس بین‌المللی مهندسی برق ایران، دانشگاه صنعت آب و برق، تهران.
- ۲- خالوزاده، حمید، خاکی صدیق، علی، لوکس، کارو، (۱۳۷۷)، آیا قیمت سهام در بازار بورس تهران قابل پیش‌بینی است؟ (کاربرد موردی تحلیل R/S برای سهام شهید-ایران)، مجله تحقیقات مالی، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران.
- ۳- خالوزاده، حمید، خاکی صدیق، علی، لوکس، کارو، (۱۳۷۷)، پیش‌بینی قیمت سهام در بازار بورس تهران با استفاده از مدل‌های خطی و غیر خطی، مجله علمی-پژوهشی مدرس، دانشگاه تربیت مدرس.
- ۴- خالوزاده، حمید، خاکی صدیق، علی، لوکس، کارو، (۱۳۷۷)، نگرشی نو به قابلیت پیش‌بینی قیمت سهام در بازار بورس تهران، مجله علمی-پژوهشی تحقیقات اقتصادی، دانشکده اقتصاد دانشگاه تهران.
- ۵- خالوزاده، حمید، خاکی صدیق، علی، (۱۳۸۲)، ارزیابی روش‌های پیش‌بینی پذیری قیمت سهام و تعیین میزان قابلیت پیش‌بینی در بازار بورس تهران، مجله علمی-پژوهشی مدرس، دانشگاه تربیت مدرس.
- ۶- خالوزاده، حمید، (بهمن ۱۳۷۷)، مدل‌سازی غیرخطی و پیش‌بینی رفتار قیمت سهام در بازار بورس تهران، رساله دکتری، دانشگاه تربیت مدرس.
- 7- Akgiray, V. , (1989), "Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts", V. 62, p: 55-80.
- 5- Bailey, W. and DeGennaro, R. , (1990), "Stock Returns and Volatility", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2, p: 204-214.
- 6- Black, F. and Scholes, M. , (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 637-59.
- 7- Brock, W. A. , Dechert, W. , Scheinkman, J. , (1987), "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", Working Paper, Madison, University of Wisconsin, University of Houston, University Chicago.
- 8- Brockman, P. and et. al. , (1997), *Deterministic Versus Stochastic Volatility: Implications for Option Pricing Models*.
- 9- Chou, R. Y. , (1988), "Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH", *Journal of Applied Econometrics*, 3, p: 279-294.
- 10- Dhillon U. and Johnson, H. , (1991), "Changes in the Standard and Poor,s 500 list", *Journal of Business*, 64, p: 75-85.
- 11- French, K. R. , Schwert, G. and Stambaugh, F. , (1987), "Expected Stock Returns and Volatility", *Journal of Financial Economics*, v19(1), p: 3-30.
- 12- Grassberger P. , Procaccia I. , (1983), "Characterization of Strange Attractors", *Phys. Review Letters*, 50: p: 3460- 3490.
- 13- Heynen, R. , (1993), "An Empirical Investigation of Observed Smile Patterns", *Review of future markets*, 13, p:317-353.
- 14- Hull, J. and White, A. , (1987), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, 42, p: 381-400.
- 15- Khaloozadeh, H. , Khaki Sedigh, A. , (2001), "Long Term Prediction of Tehran Price Index (TEPIX) using Neural Networks", *IFSA/NAFIPS*, Vancouver, Canada, p:563:567.
- 16- Khaloozadeh, H. , Khaki Sedigh, A. , (2004), "On the Predictability of Tehran Price Index (TEPIX)", 3rd, Internation Conference on System Identification and Control Problems (SICPRO,04), Moscow, Russia.
- 17- Merton, R. , (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Sciences*, 4, p: 141-83.
- 18- Oksendal, B. , (1991), *Stochastic Differential Equations*, 3rd Edition, Springer-Verlag.
- 19- Schweppe, F. C. , (1973), *Uncertain Dynamic Systems*, Prentice-Hall.
- 20- Soderstrom, T. and Stoica, P. , (1989), *System Identification*, Prentice-Hall.
- 21- Stein E. M. and SteinJ . C. , (1991), "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach", *Review of Financial Studies*, 4, p: 727-752.
- 22- Takens, F. , (1980), *Detecting Strange Attractors in Tubrulence*, Springer-Verlag, Berlin